Theorie der Felder und Wellen 2	Name :
Blatt 19	Matrikelnummer :

Aufgabe 54

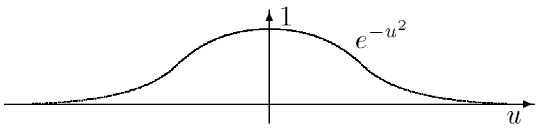
a)

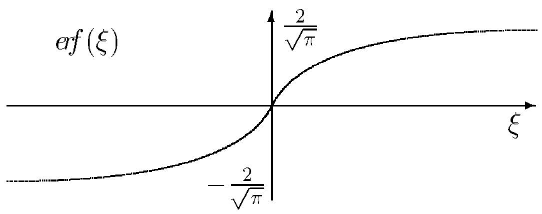
$B_z(\xi,\tau) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{B_0}{\sqrt{4\pi\tau}} e^{\frac{(\xi-\xi_0)^2}{-4\tau}}\,\mathrm{d}\xi_0$ Substitution: $u := \frac{\xi-\xi_0}{\sqrt{4\tau}} \rightsquigarrow \mathrm{d}\xi_0 = -\sqrt{4\tau}\,\mathrm{d}u$

$B_z(\xi,\tau) = \frac{-B_0}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\frac{\xi+1}{\sqrt{4\tau}}}^{\frac{\xi-1}{\sqrt{4\tau}}} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$ Sei $\mathit{erf}(\xi) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\xi} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$

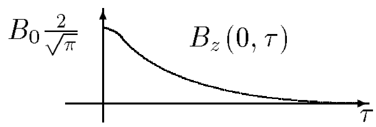
$$\boxed{B_z(\xi,\tau) = \frac{B_0}{2}\left(\mathit{erf}\left(\frac{\xi+1}{\sqrt{4\tau}}\right) - \mathit{erf}\left(\frac{\xi-1}{\sqrt{4\tau}}\right)\right)}$$

b)



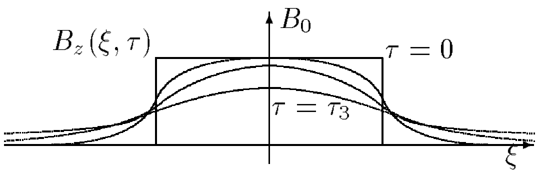


$B_z(0,\tau) = B_0 \mathit{erf}(\frac{1}{\sqrt{4\tau}})$



c)

$B_z(\xi,\tau_i) = \frac{B_0}{2}\left(\mathit{erf}\left(\frac{\xi+1}{\sqrt{4\tau_i}}\right) - \mathit{erf}\left(\frac{\xi-1}{\sqrt{4\tau_i}}\right)\right)$ mit $i \in \{1,2,3\}$ $0 < \tau_1 < \tau_2 < \tau_3$



- B_z ist symmetrisch zur $\xi = 0$ - Ebene
- B_z hat Maximum bei $\xi = 0$ $\forall \tau \in]0,\infty[$

d)

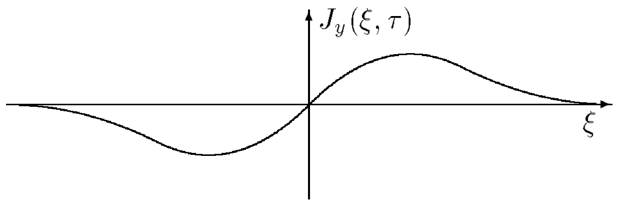
$\vec{J} = \operatorname{rot}\vec{H} = \frac{1}{\mu} J_y \vec{e}_y$

mit $J_y = \frac{-1}{\mu}\frac{\mathrm{d}B_z}{\mathrm{d}x} = \frac{-B_0}{\mu}\frac{\partial B_z}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{-B_0}{\mu d\sqrt{4\pi\tau}} \int\limits_{-1}^{1} \frac{-2(\xi-\xi_0)}{4\tau} e^{\frac{(\xi-\xi_0)^2}{-4\tau}}\,\mathrm{d}\xi_0 = \frac{2B_0}{\mu d 4\tau\sqrt{4\pi\tau}} \int\limits_{-1}^{1} (\xi-\xi_0) e^{\frac{(\xi-\xi_0)^2}{-4\tau}}\,\mathrm{d}\xi_0$

Substitution: $u := \frac{\xi-\xi_0}{\sqrt{4\tau}}$ $\mathrm{d}\xi_0 = -\sqrt{4\tau}\,\mathrm{d}u$

$J_y = \frac{-2B_0\sqrt{4\tau}}{\mu d 4\tau\sqrt{\pi}} \int\limits_{\frac{\xi+1}{\sqrt{4\tau}}}^{\frac{\xi-1}{\sqrt{4\tau}}} u e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{B_0}{\mu d\sqrt{4\pi\tau}}\left[e^{-u^2}\right]_{\frac{\xi+1}{\sqrt{4\tau}}}^{\frac{\xi-1}{\sqrt{4\tau}}}$

$$\boxed{J_y = \frac{B_0}{\mu d\sqrt{4\pi\tau}}\left(e^{\frac{(\xi-1)^2}{-4\tau}} - e^{\frac{(\xi+1)^2}{-4\tau}}\right)}$$



- $\tau = \infty : J_y = 0 \quad \forall \xi$
- $\tau = 0 : J_y = \begin{cases} 0 & \text{für } |\xi| \neq 1 \\ \infty & \text{für } \xi = 1 \\ -\infty & \text{für } \xi = -1 \end{cases}$

Aufgabe 55

a)

Normierung: $\tau = \frac{t}{\mu\kappa l^2} \qquad \xi = \frac{x}{l}$
- mit Diffusionsgleichung:

$\frac{\partial^2 B_z}{\partial \xi^2} = \frac{\partial B_z}{\partial t} \qquad \frac{\partial^2 B_z}{\partial \xi^2} = 0 \qquad \rightsquigarrow \qquad \frac{\partial B_z}{\partial t} = 0 \qquad \square$
- mit Greenscher Funktion:

$$B_z(\xi,\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{Cl\xi_0}{\sqrt{4\pi\tau}} e^{\frac{(\xi-\xi_0)^2}{-4\tau}} \,\mathrm{d}\xi_0 = \frac{Cl}{\sqrt{\pi}} \left(\underbrace{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi_0 - \xi}{\sqrt{4\tau}} e^{\frac{(\xi_0-\xi)^2}{-4\tau}} \,\mathrm{d}(\xi_0 - \xi)}_{=0} + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi}{\sqrt{4\tau}} e^{\frac{(\xi_0-\xi)^2}{-4\tau}} \,\mathrm{d}\xi_0 \right)$$

Substitution: $u := \frac{\xi_0 - \xi}{\sqrt{4\tau}} \qquad \mathrm{d}\xi_0 = \sqrt{4\tau}\,\mathrm{d}u$

$B_z(\xi,\tau) = \frac{Cl\xi}{\sqrt{4\pi\tau}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} \sqrt{4\tau}\,\mathrm{d}u = Cl\xi = Cx \qquad \square$

b)

$\vec{J} = \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{-1}{\mu} \frac{\partial B_z}{\partial x} \vec{e}_y \qquad \boxed{\vec{J} = \frac{-C}{\mu} \vec{e}_y}$

$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{\kappa} \vec{J} = \frac{-C}{\mu\kappa} \vec{e}_y}$

Poynting-Vektor: $\boxed{\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{-C^2 x}{\mu^2 \kappa} \vec{e}_x}$

c)

$\frac{W}{tV} = \kappa \vec{E}^2 \qquad \boxed{\frac{W}{tV} = \frac{C^2}{\mu^2\kappa}}$

d)

Energiesatz: $\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon \vec{E}^2}{2} + \frac{\mu \vec{H}^2}{2} \right)}_{=0} + \frac{\vec{J}^2}{\kappa} + \operatorname{div} \vec{S} = \frac{C^2}{\mu^2\kappa} - \frac{C^2}{\mu^2\kappa} = 0$

$\rightsquigarrow$ Energiesatz ist erfüllt.
Wärmeenergie ergibt sich aus der Differenz des einströmenden und des ausströmenden Energieflusses (Poynting-Vektor).

e)

Das Magnetfeld wird jetzt nicht mehr zeitinvariant bleiben sondern auseinanderdiffundieren, da es jetzt nicht mehr unendlich ausgedehnt ist und an den Rändern die Voraussetzungen aus Aufgabe a) nicht mehr erfüllt sind.