Theorie der Felder und Wellen 2	Name :
Blatt 20	Matrikelnummer :

Aufgabe 57

a)

- Mit $\vec{E} = \frac{\vec{J}}{\kappa}$ folgt $\vec{E} = 0$, da $\vec{J} < \infty$ sein muss.
- Aus $\operatorname{rot} \vec{E} = \frac{-\partial \vec{B}}{\partial t}$ folgt somit, dass in Gebiet 3 nur zeitinvariante Magnetfelder existieren können.

b)

$$\Delta \vec{E} \underbrace{- \text{grad div } E}_{=0,\text{ da ladungsfrei}} = \underbrace{\mu\kappa \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}_{=0,\text{ da } \kappa=0} + \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\Delta \vec{E} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}} \qquad \text{analog: } \boxed{\Delta \vec{B} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}}$$

c) 1)

$$\boxed{\omega_{1r} = \omega_{2e} = \omega_{2r} = \omega}$$

c) 2)

$$\frac{k_{1y}}{k_{2y}} = \frac{k_1}{k_2} \underbrace{\frac{\sin\Theta}{\sin\varphi}}_{=c_1/c_2} = \frac{c_2 c_1}{c_1 c_2} = 1 \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{k_{1y} = k_{2y}}$$

c) 3)

$$\vec{H} = \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{\mu\omega}$$

$$\boxed{\vec{H}_1 = \begin{pmatrix} \sin\Theta \\ -\cos\Theta \\ 0 \end{pmatrix} \frac{k_1 E_0}{\mu_1 \omega} e^{i(\omega t - k_1 x \cos\Theta - k_1 y \sin\Theta)} + \begin{pmatrix} \sin\Theta \\ \cos\Theta \\ 0 \end{pmatrix} \frac{k_1 A}{\mu_1 \omega} e^{i(\omega t + k_1 x \cos\Theta - k_1 y \sin\Theta)}}$$

$$\boxed{\vec{H}_2 = \begin{pmatrix} \sin\varphi \\ -\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \frac{k_2 B}{\mu_2 \omega} e^{i(\omega t - k_{2x} x - k_{2y} y)} + \begin{pmatrix} \sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \frac{k_2 C}{\mu_2 \omega} e^{i(\omega t + k_{2x} x - k_{2y} y)}}$$

d)

Dispersionsbeziehung : $\mu\epsilon\omega^2 - \mu\kappa i\omega - k^2 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad$ für $\kappa = 0$: $\mu\epsilon\omega^2 = k^2$

$$\boxed{k_{1x} = \omega\sqrt{\mu_1\epsilon_1}\cos\Theta} \qquad \boxed{k_{1y} = \omega\sqrt{\mu_1\epsilon_1}\sin\Theta} \qquad \boxed{k_{2x} = \omega\sqrt{\mu_2\epsilon_2}\cos\varphi} \qquad \boxed{k_{2y} = \omega\sqrt{\mu_2\epsilon_2}\sin\varphi}$$

mit $\varphi = \arcsin\left(\sin\left(\Theta\sqrt{\frac{\mu_1\epsilon_1}{\mu_2\epsilon_2}}\right)\right)$

e)

Randbedingung	$x = 0$	$x = d$
E_t stetig ($E_{1z} = E_{2z}$)	$E_0 + A = B$	$B + C = 0$
H_t stetig ($H_{1y} = H_{2y}$)	$(A - E_0)\frac{k_1}{\mu_1}\cos\Theta = -B\frac{k_2}{\mu_2}\cos\varphi$	Flächenströme (siehe Aufg. 57 g))
B_n stetig ($B_{1x} = B_{2x}$)	$(A + E_0)k_1 \sin\Theta = Bk_2 \sin\varphi$	$B + C = 0$

$\boxed{C = -B}$ $\boxed{B = E_0 + A}$

$(E_0 + A)k_1 \sin\Theta = (E_0 + A)k_2 \sin\varphi \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\frac{\sin\Theta}{\sin\varphi} = \frac{k_2}{k_1} = \frac{c_1}{c_2} = \sqrt{\frac{\mu_2\epsilon_2}{\mu_1\epsilon_1}}}$

$(E_0 - A)\frac{\cos\Theta}{c_1\mu_1} = (E_0 + A)\frac{\cos\varphi}{c_2\mu_2} \quad \Leftrightarrow \quad (E_0 - A)\frac{\cos\Theta}{Z_1} = (E_0 + A)\frac{\cos\varphi}{Z_2} \quad \Leftrightarrow$

$A(\frac{\cos\varphi}{Z_2} + \frac{\cos\Theta}{Z_1}) = E_0(\frac{\cos\Theta}{Z_1} - \frac{\cos\varphi}{Z_2})$

$\boxed{\frac{A}{E_0} = \frac{Z_2\cos\Theta - Z_1\cos\varphi}{Z_2\cos\Theta + Z_1\cos\varphi}}$

f)

Polarisationsstromdichte : $\vec{J}_{geb} = \frac{\partial\vec{P}}{\partial t}$ mit $\vec{P} = \epsilon_0\chi\vec{E}_2$ und $\chi = \epsilon_r - 1$

$\boxed{\vec{J}_{geb} = \epsilon_0\chi\frac{\partial E_{2z}}{\partial t}\vec{e}_z}$

gebundene Raumladungen : $\boxed{\rho_{geb} = -\operatorname{div}\vec{P} = -\epsilon_0\chi\frac{\partial E_{2z}}{\partial z}}$

Kontinuitätsgleichung : $\operatorname{div}\vec{J}_{geb} + \frac{\partial\rho_{geb}}{\partial t} \overset{!}{=} 0$

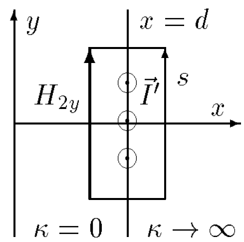
$\epsilon_0\chi\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial t}E_{2z} + (-\epsilon_0\chi\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial z}E_{2z}) = 0$ ist erfüllt

g)

$x = d$:

- Flächenladungen :
  $D_{2n} + \sigma_{frei} = D_{3n} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\sigma_{frei} = 0}$ keine Flächenladungen

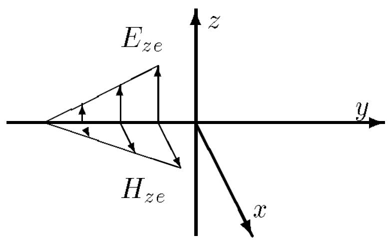
- Flächenströme :
  Magnetfeld in Gebiet 2 : $\vec{H}_2 = H_{2y}\vec{e}_y$
  $H_{2y} = \frac{-2k_2 B\cos\varphi}{\mu_2\omega}e^{i(\omega t - k_{2y}y)}\left(e^{-ik_{2x}d} + e^{ik_{2x}d}\right) = \frac{-4B\cos\varphi}{Z_2}e^{i(\omega t - k_{2y}y)}\cos(k_{2x}d)$
  Zeitliche Änderungen des Magnetfeldes induzieren den Flächenstrom $\vec{I}' = I'_z\vec{e}_z$ in der Grenzfläche, welcher ein entgegengesetzt gerichtetes Magnetfeld $\vec{H}_g = -H_{2y}\vec{e}_y$ hervorruft.
  Durchflutungsgesetz : $\oint_s \vec{H}_g\,\mathrm{d}\vec{s} = -H_g\Delta y = I'_z\Delta y$
  $\boxed{I'_z = H_{2y} = \frac{-4B\cos\varphi}{Z_2}e^{i(\omega t - k_{2y}y)}\cos(k_{2x}d)}$
  Ladungserhaltung ist erfüllt, da $\vec{I}'$ nur eine z-Komponente besitzt und von z unabhängig ist.



Aufgabe 58

a)

$\boxed{\vec{H} = \frac{\vec{e}_a \times \vec{E}}{Z} = \frac{E}{Z}\vec{e}_x}$



b)

H_x stetig, E_z stetig

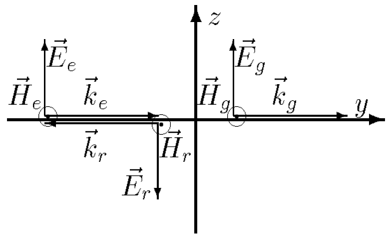
c)

$E_{ze} + E_{zr} = E_{zg} \qquad H_{xe} + H_{xr} = H_{xg}$

$Z_1(E_{ze} - E_{zr}) = E_{zg} Z_0 \quad \rightsquigarrow \quad E_{ze} + E_{zr} = \frac{Z_1}{Z_0}(E_{ze} - E_{zr})$

$\frac{E_{zr}}{E_{ze}} = \frac{Z_1/Z_0 - 1}{1 + Z_1/Z_0} \qquad \boxed{\frac{E_{zr}}{E_{ze}} = \frac{Z_1 - Z_0}{Z_1 + Z_0}}$

$E_{zg} - E_{ze} = E_{ze} - E_{zg}\frac{Z_0}{Z_1} \qquad \boxed{\frac{E_{zg}}{E_{ze}} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_0}}$



magnetische Feldstärke:

$\boxed{\vec{H}_e = \frac{\vec{e}_a \times \vec{E}_e}{Z_1} = \frac{E_{ze}}{Z_0}\vec{e}_x} \qquad \boxed{\vec{H}_r = \frac{\vec{e}_a \times \vec{E}_r}{Z_0} = \frac{(Z_0 - Z_1)E_{ze}}{Z_0(Z_0 + Z_1)}\vec{e}_x}$

$\boxed{\vec{H}_g = \frac{\vec{e}_a \times \vec{E}_g}{Z_1} = \frac{2E_{ze}}{Z_0 + Z_1}\vec{e}_x}$

d)

$\boxed{T = \frac{l_0}{c_0}}$ mit $c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$

Impulslänge im Dielektrikum : $\boxed{l_1 = T c_1 = l_0 \sqrt{\frac{\mu_0 \epsilon_0}{\mu_1 \epsilon_1}}}$

e)

$\frac{E_{zr}}{E_{ze}} = \frac{-1}{3} \qquad \frac{E_{zg}}{E_{ze}} = \frac{2}{3}$

$H_e = \frac{E_{ze}}{Z_0} = H_0 \frac{E_{ze}}{E_0} \qquad$ mit $\qquad H_0 = \frac{E_0}{Z_0}$

$H_g = \frac{4}{3} H_0 \frac{E_{ze}}{E_0} \qquad H_r = \frac{1}{3} H_0 \frac{E_{ze}}{E_0}$

$l_1 = \frac{l_0}{2}$