kleine Elektrotechnik-Formelsammlung

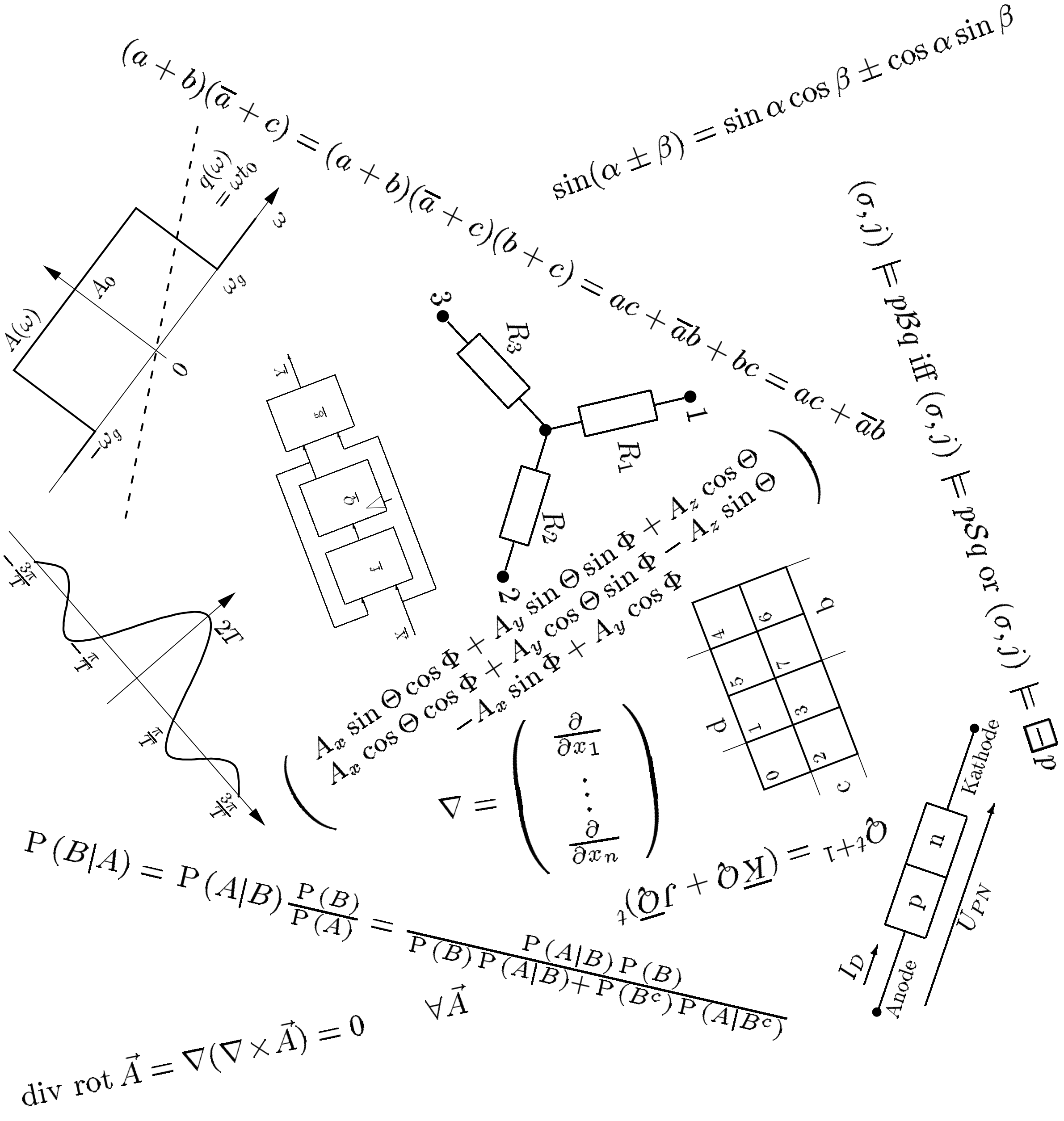
Version: 27.01

Alle Angaben ohne Gewähr.

`http://www.agutscher.de`

Andreas Gutscher

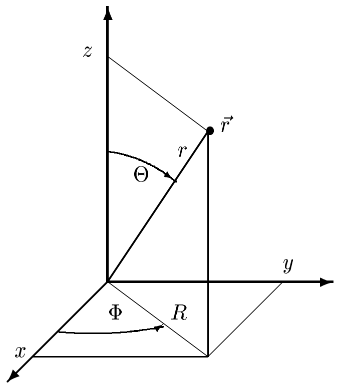
23. Oktober 2001



Inhaltsverzeichnis

1 Koordinatensysteme

	kartesische Koordinaten	Zylinderkoordinaten	Kugelkoordinaten
$\vec{r}$	$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos\Phi \\ R\sin\Phi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\Theta\cos\Phi \\ r\sin\Theta\sin\Phi \\ r\cos\Theta \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} R \\ \Phi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\Theta \\ \Phi \\ r\cos\Theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2+y^2} \\ \arctan\frac{y}{x} \\ z \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} r \\ \Theta \\ \Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{R^2+z^2} \\ \arctan\frac{R}{z} \\ \Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \arctan\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} \\ \arctan\frac{y}{x} \end{pmatrix}$
$\mathrm{d}\vec{s}$	$\begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}z \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \mathrm{d}R \\ R\,\mathrm{d}\Phi \\ \mathrm{d}z \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \mathrm{d}r \\ r\,\mathrm{d}\Theta \\ r\sin\Theta\,\mathrm{d}\Phi \end{pmatrix}$
$\mathrm{d}\vec{a}$	$\begin{pmatrix} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z \\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} R\,\mathrm{d}\Phi\,\mathrm{d}z \\ \mathrm{d}R\,\mathrm{d}z \\ R\,\mathrm{d}R\,\mathrm{d}\Phi \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} r^2\sin\Theta\,\mathrm{d}\Theta\,\mathrm{d}\Phi \\ r\sin\Theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\Phi \\ r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\Theta \end{pmatrix}$
$\mathrm{d}V$	$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$	$R\,\mathrm{d}R\,\mathrm{d}\Phi\,\mathrm{d}z$	$r^2\sin\Theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\Theta\,\mathrm{d}\Phi$



$\boxed{0 \le \Phi < 2\pi}$ $\boxed{0 \le \Theta \le \pi}$

Zusammenhang zwischen den Vektorkomponenten:

kartesische Koordinaten	$\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$	$= \begin{pmatrix} A_R\cos\Phi - A_\Phi\sin\Phi \\ A_R\sin\Phi + A_\Phi\cos\Phi \\ A_z \end{pmatrix}$	$= \begin{pmatrix} A_r\sin\Theta\cos\Phi + A_\Theta\cos\Theta\cos\Phi - A_\Phi\sin\Phi \\ A_r\sin\Theta\sin\Phi + A_\Theta\cos\Theta\sin\Phi + A_\Phi\cos\Phi \\ A_r\cos\Theta - A_\Theta\sin\Theta \end{pmatrix}$
Zylinderkoordinaten	$\begin{pmatrix} A_R \\ A_\Phi \\ A_z \end{pmatrix}$	$= \begin{pmatrix} A_x\cos\Phi + A_y\sin\Phi \\ -A_x\sin\Phi + A_y\cos\Phi \\ A_z \end{pmatrix}$	$= \begin{pmatrix} A_r\sin\Theta + A_\Theta\cos\Theta \\ A_\Phi \\ A_r\cos\Theta - A_\Theta\sin\Theta \end{pmatrix}$
Kugelkoordinaten	$\begin{pmatrix} A_r \\ A_\Theta \\ A_\Phi \end{pmatrix}$	$= \begin{pmatrix} A_R\sin\Theta + A_z\cos\Theta \\ A_R\cos\Theta - A_z\sin\Theta \\ A_\Phi \end{pmatrix}$	$= \begin{pmatrix} A_x\sin\Theta\cos\Phi + A_y\sin\Theta\sin\Phi + A_z\cos\Theta \\ A_x\cos\Theta\cos\Phi + A_y\cos\Theta\sin\Phi - A_z\sin\Theta \\ -A_x\sin\Phi + A_y\cos\Phi \end{pmatrix}$

Vektoranalytische Ausdrücke:

	kartesische Koordinaten	Zylinderkoordinaten	Kugelkoordinaten
grad A	$\begin{pmatrix} \frac{\partial A}{\partial x} \\ \frac{\partial A}{\partial y} \\ \frac{\partial A}{\partial z} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{\partial A}{\partial R} \\ \frac{\partial A}{R\partial\Phi} \\ \frac{\partial A}{\partial z} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{\partial A}{\partial r} \\ \frac{\partial A}{r\partial\Theta} \\ \frac{\partial A}{r\sin\Theta\partial\Phi} \end{pmatrix}$
div $\vec{A}$	$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{\partial}{R\partial R}(RA_R) + \frac{\partial A_\Phi}{R\partial\Phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{\partial}{r^2\partial r}(r^2A_r) + \frac{\partial}{r\sin\Theta\partial\Theta}(A_\Theta\sin\Theta) + \frac{\partial A_\Phi}{r\sin\Theta\partial\Phi}$
rot $\vec{A}$	$\begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{R\partial\Phi} - \frac{\partial A_\Phi}{\partial z} \\ \frac{\partial A_R}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial R} \\ \frac{\partial}{R\partial R}(RA_\Phi) - \frac{\partial A_R}{R\partial\Phi} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{r\sin\Theta}\left(\frac{\partial}{\partial\Theta}(A_\Phi\sin\Theta) - \frac{\partial A_\Theta}{\partial\Phi}\right) \\ \frac{1}{r}\left(\frac{\partial A_r}{\sin\Theta\partial\Phi} - \frac{\partial}{\partial r}(rA_\Phi)\right) \\ \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\Theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\Theta}\right) \end{pmatrix}$
ΔA	$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2}$	$\frac{\partial}{R\partial R}\left(R\frac{\partial A}{\partial R}\right) + \frac{\partial^2 A}{R^2\partial\Phi^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2}$	$\frac{\partial}{r^2\partial r}\left(r^2\frac{\partial A}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{r^2\sin\Theta\partial\Theta}\left(\sin\Theta\frac{\partial A}{\partial\Theta}\right) + \frac{\partial^2 A}{r^2\sin^2\Theta\partial\Phi^2}$

2 Umformungen

2.1 endliche Summen

$\boxed{\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}}$ $\boxed{\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$

2.2 Binomische Formeln

$\boxed{(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2}$

$\boxed{(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3}$

$\boxed{(a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4}$

$\boxed{(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i}b^i}$

$\boxed{(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc}$

$\boxed{(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a^2b + a^2c + ab^2 + b^2c + ac^2 + bc^2) + 6abc}$

$\boxed{a^{2n} - b^{2n} = (a^n - b^n)(a^n + b^n)}$ $\boxed{a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)}$

$\boxed{a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots b^{n-1})}$

3 Trigonometrie

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$	$210°$	$225°$	$240°$	$270°$	$300°$	$315°$	$330°$	$360°$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	-1	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	-1	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\cot\alpha$	$\mp\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\mp\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\mp\infty$

3.1 Reduktionsformeln

$\beta =$	$-\alpha$	$\frac{\pi}{2}\pm\alpha$	$\pi\pm\alpha$	$\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$
$\sin\beta =$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$
$\cos\beta =$	$\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$
$\tan\beta =$	$-\tan\alpha$	$\mp\cot\alpha$	$\pm\tan\alpha$	$\mp\cot\alpha$
$\cot\beta =$	$-\cot\alpha$	$\mp\tan\alpha$	$\pm\cot\alpha$	$\mp\tan\alpha$

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1} \qquad \boxed{\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1}$$

$$\boxed{\sin\alpha = \frac{1}{2i}(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})} \qquad \boxed{\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})}$$

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{1}{2}(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})} \qquad \boxed{\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})}$$

$$\boxed{\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha} = \pm\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}} \qquad \boxed{\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha} = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \pm\frac{\cot\alpha}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}}$$

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}}$$

(Vorzeichen je nach Quadrant)

3.2 Additionstheoreme

$$\boxed{\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta} \qquad \boxed{\cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta} \qquad \boxed{\tan(\alpha\pm\beta) = \frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\pm\tan\alpha\tan\beta}}$$

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) = \cos^2\beta - \cos^2\alpha} \qquad \boxed{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = \cos^2\beta - \sin^2\alpha}$$

3.3 vielfache Winkel

$$\boxed{\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha} \qquad \boxed{\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1} \qquad \boxed{\tan(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}}$$

$$\boxed{\sin(\tfrac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}} \qquad \boxed{\cos(\tfrac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}} \qquad \boxed{\tan(\tfrac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

(Vorzeichen je nach Quadrant)

$$\boxed{\sin(3\alpha) = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha} \qquad \boxed{\cos(3\alpha) = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha}$$

$$\boxed{\sin(4\alpha) = 8\sin\alpha\cos^3\alpha - 4\sin\alpha\cos\alpha} \qquad \boxed{\cos(4\alpha) = 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1}$$

3.4 Orthogonalitätsrelation

$$\boxed{\int_0^a \sin\frac{m\pi x}{a}\,\sin\frac{n\pi x}{a}\,\mathrm{d}x = \frac{a}{2}\delta_{mn}} \qquad (\ m,n>0\ ) \qquad \text{mit } \boxed{\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & ,m=n \\ 0 & ,m\neq n \end{cases}}$$

4 Folgen und Reihen

4.1 Reihen

- geometrische Reihe: $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}}$ $(|x|<1)$ $\qquad$ $\boxed{\sum_{n=0}^{m} x^n = \begin{cases} \frac{1-x^{m+1}}{1-x} & ,x\neq 1 \\ m+1 & ,x=1 \end{cases}}$
- binomische Reihe: $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} x^n = (1+x)^r}$ $\qquad$ für $|x|\leq 1, r>0$ oder $|x|<1, r<0$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} = e} \qquad \boxed{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n} = 2} \qquad \boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi}{6}}$$

4.2 Potenzreihen

$$\boxed{e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}} \qquad \boxed{\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}} \qquad \boxed{\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}}$$

$$\boxed{\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}} \ (\text{für } -1 < x \leq 1\ ) \qquad \boxed{\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty}-\frac{x^n}{n}} \ (\text{für } -1 \leq x < 1\ )$$

$\sinh x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$\cosh x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$
$\sqrt{1+x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} x^n$	$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} x^n$

5 Ableitungen und Integrale

5.1 Ableitungen

$\mathbf{f'(x) = \frac{df(x)}{dx}}$	$\mathbf{f(x)}$	
$af'(x)$	$af(x)$	
$f'(x) \pm g'(x)$	$f(x) \pm g(x)$	
$f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$	$f(x)g(x)$	
$\frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$	$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\forall\ g(x) \neq 0$
$f'(g(x))g'(x)$	$f(g(x))$	
nx^{n-1}	x^n	$\forall\ n \in \mathbf{R},\ x \neq 0\ \forall n < 0$
$-\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x}$	
ae^{ax}	e^{ax}	
$a^x \ln a$	a^x	$\forall\ a > 0,\ a \neq 1$
$x^x(a + \ln\lvert x\rvert)$	x^x	
$\frac{1}{x}$	$\ln x$	$\forall\ n > 0$
$\frac{1}{x \ln b}$	$\log_b x$	$\forall\ x > 0$
$\cos x$	$\sin x$	
$-\sin x$	$\cos x$	
$\frac{1}{\cos^2 x}$ $= 1 + \tan^2 x$	$\tan x$	
$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\cot x$	

$\mathbf{f'(x) = \frac{df(x)}{dx}}$	$\mathbf{f(x)}$	
$-\frac{\cos x}{\sin^2 x}$	$\frac{1}{\sin x}$	
$\frac{\sin x}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{\cos x}$	
$\sin(2x)$ $= 2\sin x \cos x$	$\sin^2 x$	
$-\sin(2x)$	$\cos^2 x$	
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$\forall\ \lvert x\rvert < 1$
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$	$\forall\ \lvert x\rvert < 1$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	
$-\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arccot} x$	
$\cosh x$	$\sinh x$	
$\sinh x$	$\cosh x$	
$\frac{1}{\cosh^2 x}$	$\tanh x$	
$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\operatorname{arsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$	
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{arcosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$	$\forall\ x > 1$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{artanh} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$	$\forall\ \lvert x\rvert < 1$

5.2 Ableitung eines Integrals

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x} \int\limits_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int\limits_{g(x)}^{h(x)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\,\mathrm{d}y + f(x,h(x))\frac{\mathrm{d}h(x)}{\mathrm{d}x} - f(x,g(x))\frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}}$$

5.3 bestimmte Integrale

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+ia)^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}} \quad \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

5.4 unbestimmte Integrale

$\mathbf{f(x)} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{F(x)}}{\mathrm{d}\mathbf{x}}$	$\mathbf{F(x)}$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$ $\quad \forall\ n \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
e^{ax}	$\frac{e^{ax}}{a}$
xe^{ax}	$\frac{(ax-1)e^{ax}}{a^2}$
x^2e^{ax}	$\frac{(a^2x^2-2ax+2)e^{ax}}{a^3}$
x^3e^{ax}	$\frac{(a^3x^3-3a^2x^2+6ax-6)e^{ax}}{a^4}$
$\mathrm{g}'(x)e^{\mathrm{g}(x)}$	$e^{\mathrm{g}(x)}$
a^{bx}	$\frac{a^{bx}}{b\ln a}$ $\quad \forall\ a < 0,\ a \neq 1$
$\ln(ax)$	$x\left(\ln(ax)-1\right)$ $\quad \forall\ ax > 0$
$x\ln(ax)$	$\frac{x^2}{2}\left(\ln(ax)-\frac{1}{2}\right)$ $\quad \forall\ ax > 0$
$(\ln(ax))^2$	$x\left(\ln(ax)\right)^2 - 2x\ln(ax) + 2x$ $\quad \forall\ ax > 0$
$\log_b(ax)$	$\frac{x}{\ln b}\left(\ln(ax)-1\right)$
$\frac{1}{ax+b}$	$\frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert$
$\frac{x}{ax+b}$	$\frac{x}{a}-\frac{b}{a^2}\ln\lvert ax+b\rvert$
$\frac{1}{(ax+b)^2}$	$\frac{-1}{ax+b}$
$\frac{1}{x^2+a^2}$	$\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)$
$\frac{x}{x^2+a^2}$	$\frac{1}{2}\ln(x^2+a^2)$
$\frac{1}{a^2-x^2}$	$\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{a+x}{a-x}\right\rvert = \begin{cases} \frac{1}{a}\operatorname{artanh}\left(\frac{x}{a}\right) & \forall\ \lvert x\rvert < a \\ \frac{1}{a}\operatorname{arcoth}\left(\frac{x}{a}\right) & \forall\ \lvert x\rvert > a \end{cases}$
$\sqrt{x^2+a^2}$	$\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a^2}+a^2\operatorname{arsinh}\left(\frac{x}{a}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a^2}+a^2\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)\right)$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-a^2}-a^2\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2-a^2}\right\rvert\right)$ $\quad \forall\ \lvert x\rvert > a$
$\sqrt{a^2-x^2}$	$\frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\ln\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right)$ $\quad \forall\ \lvert x\rvert < a$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$	$\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) = \operatorname{arsinh}\left(\frac{x}{a}\right)$
$\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$	$\sqrt{x^2+a^2}$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}^3}$	$\frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}$
$\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}^3}$	$\frac{-1}{\sqrt{x^2+a^2}}$
$\frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}^3}$	$\frac{-x}{\sqrt{x^2+a^2}}+\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$	$\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) = \operatorname{arcosh}\left(\frac{x}{a}\right)$ $\quad \forall\ \lvert x\rvert > a$
$\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$	$\sqrt{x^2-a^2}$ $\quad \forall\ \lvert x\rvert > a$
$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$ $\quad \forall\ \lvert x\rvert < a$
$\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$-\sqrt{a^2-x^2}$ $\quad \forall\ \lvert x\rvert < a$
$\frac{1}{(ax^2+b)\sqrt{fx^2+g}}$	$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{b}\sqrt{ag-bf}}\arctan\frac{x\sqrt{ag-bf}}{\sqrt{b}\sqrt{fx^2+g}} & \text{für } ag-bf > 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{b}\sqrt{ag-bf}}\ln\left(\frac{\sqrt{b}\sqrt{fx^2+g}+x\sqrt{bf-ag}}{\sqrt{b}\sqrt{fx^2+g}-x\sqrt{bf-ag}}\right) & \text{für } ag-bf < 0 \end{cases}$
$\frac{1}{ax^2+bx+c}$	$\begin{cases} \frac{2}{\sqrt{\Delta}}\arctan\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}}\right) & \text{für } \Delta > 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\lvert\Delta\rvert}}\ln\left\lvert\frac{2ax+b-\sqrt{\lvert\Delta\rvert}}{2ax+b+\sqrt{\lvert\Delta\rvert}}\right\rvert & \text{für } \Delta < 0 \end{cases}$ mit $\Delta = 4ac-b^2$ $(a \neq 0, \Delta \neq 0)$

$\mathbf{f(x)} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{F(x)}}{\mathrm{d}\mathbf{x}}$	$\mathbf{F(x)}$
$\sin(ax)$	$-\frac{1}{a}\cos(ax)$
$\sin^2(ax)$	$\frac{x}{2}-\frac{\sin(2ax)}{4a} = \frac{x}{2}-\frac{\sin(ax)\cos(ax)}{2a}$
$\sin^3(ax)$	$\frac{\cos(ax)}{a}+\frac{\cos^3(ax)}{3a}$
$\sin^n(ax)$	$-\frac{\sin^{n-1}(ax)\cos(ax)}{na}+\frac{n-1}{n}\int\sin^{n-2}(ax)\,\mathrm{d}x$ $\quad (n \in \mathbb{N},\ n > 0)$
$x\sin(ax)$	$\frac{\sin(ax)}{a^2}-\frac{x\cos(ax)}{a}$
$\frac{1}{\sin(ax)}$	$\frac{1}{a}\ln\left\lvert\tan\left(\frac{ax}{2}\right)\right\rvert$
$\frac{1}{\sin^2(ax)}$	$-\frac{\cot(ax)}{a}$
$\sin(ax)\,e^{bx}$	$\frac{1}{a^2+b^2}e^{bx}\left(b\sin(ax)-a\cos(ax)\right)$
$\cos(ax)$	$\frac{1}{a}\sin(ax)$
$x\cos(ax)$	$\frac{\cos(ax)}{a^2}+\frac{x\sin(ax)}{a}$
$\cos^2(ax)$	$\frac{x}{2}+\frac{\sin(2ax)}{4a} = \frac{x}{2}+\frac{\sin(ax)\cos(ax)}{2a}$
$\cos^3(ax)$	$\frac{\sin(ax)}{a}-\frac{\sin^3(ax)}{3a}$
$\cos^n(ax)$	$\frac{\cos^{n-1}(ax)\sin(ax)}{na}+\frac{n-1}{n}\int\cos^{n-2}(ax)\,\mathrm{d}x$ $\quad (n \in \mathbb{N},\ n > 0)$
$\frac{1}{\cos(ax)}$	$\frac{1}{a}\ln\left\lvert\tan\left(\frac{ax}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\rvert$
$\frac{1}{\cos^2(ax)}$	$-\frac{\tan(ax)}{a}$
$\cos(ax)e^{bx}$	$\frac{1}{a^2+b^2}e^{bx}\left(a\sin(ax)+b\cos(ax)\right)$
$\frac{1}{a+b\cos x}$	$\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\frac{(a-b)\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{a^2-b^2}}$ $\quad (a^2 > b^2, -\pi \leq x \leq \pi)$
$\sin(ax)\cos ax$	$\frac{\sin^2(ax)}{2a}$
$\tan(ax)$	$-\frac{\ln\cos(ax)}{a}$
$\tan^2(ax)$	$\frac{\tan(ax)}{a}-x$
$\tan^3(ax)$	$\frac{\tan^2(ax)}{2a}+\frac{\ln\cos(ax)}{a}$
$\tan^n(ax)$	$\frac{\tan^{n-1}(ax)}{a(n-1)}-\int\tan^{n-2}(ax)\,\mathrm{d}x$ $\quad (n \in \mathbb{N},\ n \neq 1)$
$\cot(ax)$	$\frac{\ln\sin(ax)}{a}$
$\cot^2(ax)$	$-\frac{\cot(ax)}{a}-x$
$\cot^3(ax)$	$-\frac{\cot^2(ax)}{2a}-\frac{\ln\sin(ax)}{a}$
$\cot^n(ax)$	$-\frac{\cot^{n-1}(ax)}{a(n-1)}-\int\cot^{n-2}(ax)\,\mathrm{d}x$ $\quad (n \in \mathbb{N},\ n \neq 1)$
$\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$	$x\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+\sqrt{a^2-x^2}$
$\arccos\left(\frac{x}{a}\right)$	$x\arccos\left(\frac{x}{a}\right)-\sqrt{a^2-x^2}$
$\arctan\left(\frac{x}{a}\right)$	$x\arctan\left(\frac{x}{a}\right)-\frac{a}{2}\ln\left(x^2+a^2\right)$
$\operatorname{arccot}\left(\frac{x}{a}\right)$	$x\operatorname{arccot}\left(\frac{x}{a}\right)+\frac{a}{2}\ln\left(x^2+a^2\right)$
$\operatorname{arsinh}\left(\frac{x}{a}\right)$	$x\operatorname{arsinh}\left(\frac{x}{a}\right)-\sqrt{x^2+a^2}$
$\operatorname{arcosh}\left(\frac{x}{a}\right)$	$x\operatorname{arcosh}\left(\frac{x}{a}\right)-\sqrt{x^2-a^2}$
$\operatorname{artanh}\left(\frac{x}{a}\right)$	$x\operatorname{artanh}\left(\frac{x}{a}\right)+\frac{a}{2}\ln\left\lvert a^2-x^2\right\rvert$
$\operatorname{arcoth}\left(\frac{x}{a}\right)$	$x\operatorname{arcoth}\left(\frac{x}{a}\right)+\frac{a}{2}\ln\left\lvert x^2-a^2\right\rvert$

5.5 Flächenintegrale

5.5.1 Integration über eine Zylinderoberfläche

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} R\cos\Phi \\ R\sin\Phi \\ z \end{pmatrix} \qquad \boxed{\iint_a f(\Phi, z)\,\mathrm{d}a = \int_0^{2\pi}\int_{z_1}^{z_2} f(\Phi, z) R\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\Phi}$$

5.5.2 Integration über eine Kugeloberfläche

$$\vec{r} = R\begin{pmatrix} \sin\Theta\cos\Phi \\ \sin\Theta\sin\Phi \\ \cos\Theta \end{pmatrix} \qquad \boxed{\iint_a f(\Phi,\Theta)\,\mathrm{d}a = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\Phi,\Theta) R^2 \sin\Theta\,\mathrm{d}\Theta\,\mathrm{d}\Phi}$$

$$\vec{r} = R\begin{pmatrix} \cos\Theta\cos\Phi \\ \cos\Theta\sin\Phi \\ \sin\Theta \end{pmatrix} \qquad \boxed{\iint_a f(\Phi,\Theta)\,\mathrm{d}a = \int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\Phi,\Theta) R^2 \cos\Theta\,\mathrm{d}\Theta\,\mathrm{d}\Phi}$$

5.6 Volumenintegrale

5.6.1 Integration über ein Zylindervolumen

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r\cos\Phi \\ r\sin\Phi \\ z \end{pmatrix} \qquad \boxed{\iiint_V f(r,\Phi,z)\,\mathrm{d}V = \int_{z_1}^{z_2}\int_0^{R}\int_0^{2\pi} f(r,\Phi,z) r\,\mathrm{d}\Phi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z}$$

5.6.2 Integration über ein Kugelvolumen

$$\vec{r} = r\begin{pmatrix} \sin\Theta\cos\Phi \\ \sin\Theta\sin\Phi \\ \cos\Theta \end{pmatrix} \qquad \boxed{\iiint_V f(r,\Phi,\Theta)\,\mathrm{d}V = \int_0^{R}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(r,\Phi,\Theta) r^2 \sin\Theta\,\mathrm{d}\Phi\,\mathrm{d}\Theta\,\mathrm{d}r}$$

$$\vec{r} = r\begin{pmatrix} \cos\Theta\cos\Phi \\ \cos\Theta\sin\Phi \\ \sin\Theta \end{pmatrix} \qquad \boxed{\iiint_V f(r,\Phi,\Theta)\,\mathrm{d}V = \int_0^{R}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\pi} f(r,\Phi,\Theta) r^2 \cos\Theta\,\mathrm{d}\Phi\,\mathrm{d}\Theta\,\mathrm{d}r}$$

6 Vektoranalysis

- Nabla-Operator: $\boxed{\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}}$
- Laplace-Operator: $\boxed{\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}}$
- Gradient: $\boxed{\mathrm{grad}\, f = \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}}$
- Divergenz: $\boxed{\mathrm{div}\,\vec{A} = \nabla\vec{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial A_n}{\partial x_n}}$
- Rotation:
  - im $\mathbf{R}^2$: $\boxed{\mathrm{rot}\,\vec{A} = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}}$
  - im $\mathbf{R}^3$: $\boxed{\mathrm{rot}\,\vec{A} = \nabla\times\vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix}}$

$$\boxed{\mathrm{div}\ \mathrm{rot}\,\vec{A} = \nabla(\nabla\times\vec{A}) = 0 \qquad \forall\vec{A}} \quad \boxed{\mathrm{rot}\ \mathrm{grad}\, f = \nabla\times(\nabla f) = 0 \qquad \forall f}$$

$$\boxed{\mathrm{div}\,(\vec{A}\times\vec{H}) = \vec{H}\,\mathrm{rot}\,\vec{A} - \vec{A}\,\mathrm{rot}\,\vec{H}} \quad \boxed{\mathrm{grad}\,(fg) = f\,\mathrm{grad}\, g + g\,\mathrm{grad}\, f} \quad \boxed{\mathrm{div}\,(f\vec{A}) = f\,\mathrm{div}\,\vec{A} + \vec{A}\,\mathrm{grad}\, f}$$

6.1 Integralsätze

Stokesscher Integralsatz: $\boxed{\iint_a \mathrm{rot}\,\vec{A}\,\mathrm{d}\vec{a} = \oint_{s=\partial a} \vec{A}\,\mathrm{d}\vec{s}}$

Gaußscher Integralsätze : $\boxed{\oiint_a \vec{A}\,\mathrm{d}\vec{a} = \iiint_V \mathrm{div}\,\vec{A}\,\mathrm{d}V}$ $\boxed{\oiint_a A\,\mathrm{d}a = \iiint_V \mathrm{grad}\,A\,\mathrm{d}V}$ $\boxed{\oiint_a \vec{A}\times\mathrm{d}\vec{a} = -\iiint_V \mathrm{rot}\,\vec{A}\,\mathrm{d}V}$

Greensche Integtalsätze: $\boxed{\iiint_V (\Psi\Delta\Phi - \Phi\Delta\Psi)\,\mathrm{d}V = \oiint_a \left(\Psi\frac{\partial\Phi}{\partial n} - \Phi\frac{\partial\Psi}{\partial n}\right)\,\mathrm{d}a}$ $\boxed{\iiint_V \left(\Phi\Delta\Phi + (\,\mathrm{grad}\,\Phi)^2\right)\,\mathrm{d}V = \oiint_a \Phi\frac{\partial\Phi}{\partial n}\,\mathrm{d}a}$

7 Transformationen

7.1 Fourierreihen-Entwicklung

7.1.1 reelle Fourierreihe

Jede periodische Funktion $f(t)$ kann als Fourierreihe dargestellt werden. Sei T ihre Periode, dann gilt:

$\boxed{f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)\right)}$ $\left(\text{An allen Stellen gilt: } f(t) = \lim\limits_{\epsilon\to\infty} \frac{f(t+\epsilon)-f(t-\epsilon)}{2}\right)$

Koeffizenten:

$\boxed{a_n = \frac{2}{T}\int\limits_0^T f(t)\cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)\,\mathrm{d}t \qquad \text{für } n \geq 0}$ $\boxed{b_n = \frac{2}{T}\int\limits_0^T f(t)\sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)\,\mathrm{d}t \qquad \text{für } n \geq 1}$

Symmetrie:

- Gerade Funktion : $f(t) = f(-t) \quad \Leftrightarrow \quad b_n = 0 \quad \forall n$
- Ungerade Funktion : $f(t) = -f(-t) \quad \Leftrightarrow \quad a_n = 0 \quad \forall n$

7.1.2 komplexe Fourierreihe

$\boxed{f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{2\pi n}{T}t}}$ mit den Koeffizenten: $\boxed{c_n = \frac{1}{T}\int\limits_0^T f(t)e^{-i\frac{2\pi n}{T}t}\,\mathrm{d}t}$

Symmetrie:

- Gerade Funktion : $f(t) = f(-t) \quad \Leftrightarrow \quad c_n$ ist reell $\forall n$
- Ungerade Funktion : $f(t) = -f(-t) \quad \Leftrightarrow$ ist imaginär $\forall n$

7.1.3 Umrechnung zwischen reeller und komplexer Fourierreihe

$$\boxed{c_n = \begin{cases} \frac{a_0}{2} & \text{für } n = 0 \\ \frac{1}{2}(a_n - ib_n) & \text{für } n > 0 \\ \frac{1}{2}(a_n + ib_n) & \text{für } n < 0 \end{cases}} \qquad \boxed{\begin{array}{ll} \frac{a_0}{2} = c_0 & \\ a_n = c_n + c_{-n} & \forall n \geq 1 \\ b_n = i(c_n - c_{-n}) & \forall n \geq 1 \end{array}}$$

7.1.4 Zusammenhang Fourierreihe - Fouriertransformation

Sei $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_0(t - nT)$ mit $f_0(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F_0(\omega)$, dann ist $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$, $(\omega_0 = \frac{2\pi}{T})$ mit den Koeffizenten $\boxed{c_n = \frac{1}{T}F_0(n\omega_0)}$.

Es gilt: $\boxed{F(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(\omega - n\omega_0)}$

7.1.5 Parsevalsche Gleichung

- Sei $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$, dann gilt: $\boxed{\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{a_0^2}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right)}$
- Sei $f(x) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$, dann gilt: $\boxed{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2}$

7.2 Fourier-Transformation

7.2.1 Definition

$\boxed{f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t}$ $\boxed{F(\omega) \bullet\!\!-\!\!\circ f(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}\,\mathrm{d}\omega}$ $\boxed{F(\omega) = R(\omega) + iX(\omega)}$

7.2.2 Symmetrie

- Gerade Funktion: $f(t) = f(-t) \quad \Leftrightarrow \quad F(\omega)$ ist reell

$$\boxed{f_g(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F_g(\omega) = R(\omega) = 2\int\limits_0^{\infty} f_g(t)\cos(\omega t)\,\mathrm{d}t \qquad F_g(\omega) \bullet\!\!-\!\!\circ f_g(t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty} F_g(\omega)\cos(\omega t)\,\mathrm{d}\omega}$$

- Ungerade Funktion: $f(t) = -f(-t) \quad \Leftrightarrow \quad F(\omega)$ ist imaginär

$$\boxed{f_u(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; F_u(\omega) = iX(\omega) = 2i \int\limits_0^\infty f_u(t)\sin(\omega t)\,\mathrm{d}t \qquad F_u(\omega) \;\bullet\!\!-\!\!\circ\; f_u(t) = \frac{1}{i\pi}\int\limits_0^\infty F_u(\omega)\sin(\omega t)\,\mathrm{d}\omega}$$

- Zerlegung:
gilt $f(t) = 0 \quad \forall t < 0$, dann lässt sich $f(t)$ in einen geraden und einen ungeraden Anteil zerlegen:

$$\boxed{f_g(t) = \frac{1}{2}\left(f(t) + f(-t)\right) = \left\{\begin{array}{ll} \frac{1}{2}f(t) & \text{, für } t > 0 \\ \frac{1}{2}f(-t) & \text{, für } t < 0 \end{array}\right\} = \frac{1}{2}f(|t|) \quad \text{gerade in } t}$$

$$\boxed{f_u(t) = \frac{1}{2}\left(f(t) - f(-t)\right) = \left\{\begin{array}{ll} \frac{1}{2}f(t) & \text{, für } t > 0 \\ -\frac{1}{2}f(-t) & \text{, für } t < 0 \end{array}\right\} = \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(t) f(|t|) \text{ ungerade in } t}$$

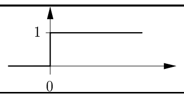
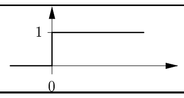
$\rightarrow \boxed{f(t) = f_g(t) + f_u(t)}$

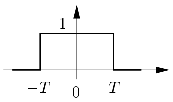
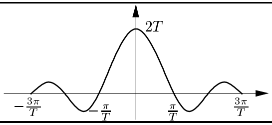
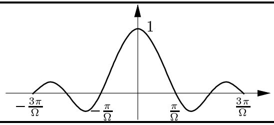
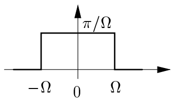
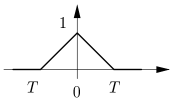
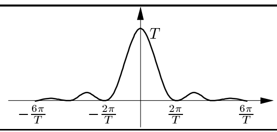
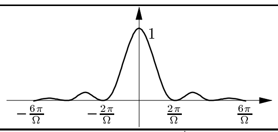
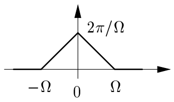
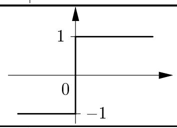
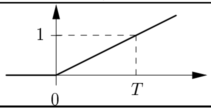
7.2.3 Eigenschaften

Sei $f(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; F(\omega) = R(\omega) + iX(\omega) = A(\omega)e^{i\varphi(\omega)}$ und $f_i(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; F_i(\omega)$, dann:

Symmetrie:	$f(-t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; F(-\omega) \qquad \bar{f}(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \bar{F}(-\omega) \qquad F(-\omega) = \bar{F}(\omega)$ $R(-\omega) = R(\omega) \qquad X(-\omega) = -X(\omega) \qquad A(-\omega) = A(\omega) \qquad \varphi(-\omega) = -\varphi(\omega)$
Linearität:	$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega)$
Vertauschungssatz:	$f(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; F(\omega) \quad \Leftrightarrow F(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; 2\pi f(-\omega)$
Ähnlichkeitssatz:	$f(at) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{1}{\lvert a\rvert}F(\frac{\omega}{a}) \qquad (a \neq 0)$
Zeitverschiebung:	$f(t - t_0) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; F(\omega)e^{-i\omega t_0}$
Frequenzverschiebung:	$f(t)e^{i\omega_0 t} \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; F(\omega - \omega_0)$
Zeitdifferentiation:	$\frac{\mathrm{d}^{(n)}}{\mathrm{d}t^n}f(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; (i\omega)^n F(\omega)$
Zeitintegration:	$\int\limits_{-\infty}^{t} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{1}{(i\omega)}F(\omega) \qquad (\text{ falls } F(0) = 0)$
Frequenzdifferentiation:	$(-it)^n f(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{\mathrm{d}^{(n)}}{\mathrm{d}\omega^n}F(\omega)$
Frequenzintegration:	$\frac{1}{(-it)}f(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \int\limits_{-\infty}^{\omega} F(y)\,\mathrm{d}y \qquad (\text{ falls } f(0) = 0)$
Faltung im Zeitbereich:	$f_1(t) * f_2(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; F_1(\omega)F_2(\omega)$
Faltung im Frequenzbereich:	$f_1(t)f_2(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{1}{2\pi}F_1(\omega) * F_2(\omega)$
Parsevalsches Theorem:	$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \lvert F(\omega)\rvert^2\,\mathrm{d}\omega \qquad$ (Signal-Energie)

7.2.4 Beispiele

$f(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$F(\omega)$
1	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$2\pi\delta(\omega)$
$\delta(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	1
$\delta(t - T)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$e^{-i\omega T}$
$e^{i\Omega t}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$2\pi\delta(\omega - \Omega)$
 $\mathrm{s}(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega)$
$\frac{i}{2\pi t} + \frac{1}{2}\delta(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\mathrm{s}(\omega)$ 

	$f(t)$		$F(\omega)$	
	$r_T(t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$2T\,\mathrm{si}\,(T\omega)$	
	$\mathrm{si}\,(\Omega t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{\pi}{\Omega} r_\Omega(\omega)$	
	$r_T(t)\left(1-\frac{\lvert t\rvert}{T}\right)$	$\circ\!-\!\bullet$	$T\,\mathrm{si}^2(\frac{T\omega}{2})$	
	$\mathrm{si}^2(\frac{\Omega t}{2})$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{2\pi}{\Omega} r_\Omega(\omega)\left(1-\frac{\lvert\omega\rvert}{\Omega}\right)$	
	$\mathrm{sgn}\,(t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{2}{i\omega}$	
	$\mathrm{s}\,(t)\frac{t}{T}$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{-1}{T\omega^2}+\frac{i\pi}{T}\delta'(\omega)$	
	$\mathrm{s}\,(t)e^{-at}$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{a+i\omega}$	$\forall\ (a>0)$
	$\mathrm{s}\,(t)te^{-at}$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{(a+i\omega)^2}$	$\forall\ (a>0)$
	e^{-at^2}	$\circ\!-\!\bullet$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$	$\forall\ (a>0)$
	$e^{-a\lvert t\rvert}$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{2a}{a^2+\omega^2}$	$\forall\ (a>0)$
	$\frac{a}{a^2+t^2}$	$\circ\!-\!\bullet$	$\pi e^{-a\lvert\omega\rvert}$	$\forall\ (a>0)$
	$\mathrm{sgn}\,(t)e^{-a\lvert t\rvert}$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{-2i\omega}{a^2+\omega^2}$	$\forall\ (a>0)$
	$\cos(\Omega t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\pi(\delta(\omega-\Omega)+\delta(\omega+\Omega))$	
	$\mathrm{s}\,(t)\cos(\Omega t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{\pi}{2}(\delta(\omega-\Omega)+\delta(\omega+\Omega))+\frac{i\omega}{(\Omega^2-\omega^2)}$	
	$r_T(t)\cos(\Omega t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$T\,\mathrm{si}\,(T(\omega+\Omega))+T\,\mathrm{si}\,(T(\omega-\Omega))$	
	$\frac{\Omega}{2\pi}\left(\,\mathrm{si}\,(\Omega(t+T))+\,\mathrm{si}\,(\Omega(t-T))\right)$	$\circ\!-\!\bullet$	$r_\Omega(\omega)\cos(\omega T)$	
	$\sin(\Omega t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$-i\pi(\delta(\omega-\Omega)-\delta(\omega+\Omega))$	
	$\mathrm{s}\,(t)\sin(\Omega t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{-i\pi}{2}(\delta(\omega-\Omega)-\delta(\omega+\Omega))+\frac{\Omega}{(\Omega^2-\omega^2)}$	
	$r_T(t)\cos^2(\frac{\pi t}{2T})$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{\sin(\omega T)}{\omega(1-(\frac{\omega T}{\pi})^2)}$	
	$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\Omega\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\Omega)$	$(\Omega=\frac{2\pi}{T})$

7.3 Laplace-Transformation

7.3.1 Definition

$$f(t)\ \circ\!\overset{L}{-}\!\bullet\ F_L(p)=\int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t$$

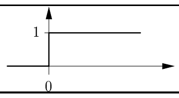
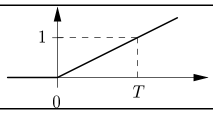
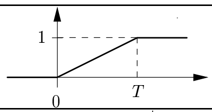
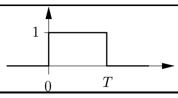
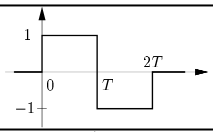
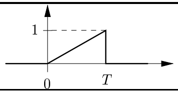
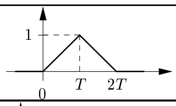
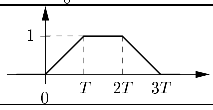
$$F_L(p)\ \bullet\!\overset{L}{-}\!\circ\ f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}F_L(p)e^{pt}\,\mathrm{d}p \qquad (p\in\mathbb{C})$$

7.3.2 Eigenschaften

Sei $f(t)\ \circ\!\overset{L}{-}\!\bullet\ F_L(p)$ und $f_i(t)\ \circ\!\overset{L}{-}\!\bullet\ F_{L,i}(p)$, dann:

Symmetrie:	$f(-t)\ \circ\!\overset{L}{-}\!\bullet\ -F_L(-p)$
Linearität:	$a_1f_1(t)+a_2f_2(t)\ \circ\!\overset{L}{-}\!\bullet\ a_1F_{L,1}(p)+a_2F_{L,2}(p)$
Ähnlichkeitssatz:	$f(at)\ \circ\!\overset{L}{-}\!\bullet\ \frac{1}{a}F_L(\frac{p}{a})\qquad(a\neq 0)$
Zeitverschiebung:	$f(t-t_0)\ \circ\!\overset{L}{-}\!\bullet\ F_L(p)e^{-pt_0}$
Frequenzverschiebung:	$f(t)e^{p_0t}\ \circ\!\overset{L}{-}\!\bullet\ F_L(p-p_0)$
Zeitdifferentiation:	$f'(t)\ \circ\!\overset{L}{-}\!\bullet\ pF_L(p)-f(0)$ $f''(t)\ \circ\!\overset{L}{-}\!\bullet\ p^2F_L(p)-pf(0)-f'(0)$
Zeitintegration:	$\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\ \circ\!\overset{L}{-}\!\bullet\ \frac{1}{p}F_L(p)$
Frequenzdifferentiation:	$tf(t)\ \circ\!\overset{L}{-}\!\bullet\ -F_L'(p)$
Faltung:	$f_1(t)*f_(t)\ \circ\!\overset{L}{-}\!\bullet\ F_{L,1}F_{L,2}$

7.3.3 Beispiele

	$f(t)$	$\overset{L}{\circ\!-\!\bullet}$	$F_L(p)$ Konvergenzgebiet	
	$\delta(t)$	$\overset{L}{\circ\!-\!\bullet}$	1	
	$\mathrm{s}(t)$	$\overset{L}{\circ\!-\!\bullet}$	$\frac{1}{p}$	$(Re(p)>0)$
	$\mathrm{s}(t)e^{at}$	$\overset{L}{\circ\!-\!\bullet}$	$\frac{1}{p-a}$	$(Re(p)>Re(a))$
	$\mathrm{s}(t)te^{at}$	$\overset{L}{\circ\!-\!\bullet}$	$\frac{1}{(p-a)^2}$	$(Re(p)>Re(a))$
	$\mathrm{s}(t)t^n e^{at}$	$\overset{L}{\circ\!-\!\bullet}$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$	$(Re(p)>Re(a), n=0,1,2,\ldots)$
	$\mathrm{s}(t)\sin(\Omega t)$	$\overset{L}{\circ\!-\!\bullet}$	$\frac{\Omega}{\Omega^2+p^2}$	$(Re(p)>0)$
	$\mathrm{s}(t)\cos(\Omega t)$	$\overset{L}{\circ\!-\!\bullet}$	$\frac{p}{\Omega^2+p^2}$	$(Re(p)>0)$
	$\mathrm{s}(t)e^{at}\sin(\Omega t)$	$\overset{L}{\circ\!-\!\bullet}$	$\frac{\Omega}{(p-a)^2+\Omega^2}$	$(Re(p)>Re(a))$
	$\mathrm{s}(t)e^{at}\cos(\Omega t)$	$\overset{L}{\circ\!-\!\bullet}$	$\frac{p-a}{(p-a)^2+\Omega^2}$	$(Re(p)>Re(a))$
	$\mathrm{s}(t)t\sin(\Omega t)$	$\overset{L}{\circ\!-\!\bullet}$	$\frac{2\Omega p}{(p^2+\Omega^2)^2}$	$(Re(p)>0)$
	$\mathrm{s}(t)t\cos(\Omega t)$	$\overset{L}{\circ\!-\!\bullet}$	$\frac{p^2-\Omega^2}{(p^2+\Omega^2)^2}$	$(Re(p)>0)$
	$\mathrm{s}(t)\sin^2(\Omega t)$	$\overset{L}{\circ\!-\!\bullet}$	$\frac{2\Omega^2}{p(p^2+4\Omega^2)}$	$(Re(p)>0)$
	$\mathrm{s}(t)\cos^2(\Omega t)$	$\overset{L}{\circ\!-\!\bullet}$	$\frac{p^2+2\Omega^2}{p(p^2+4\Omega^2)}$	$(Re(p)>0)$
	$\mathrm{s}(t)\sinh(\Omega t)$	$\overset{L}{\circ\!-\!\bullet}$	$\frac{\Omega}{p^2-\Omega^2}$	$(Re(p)>0)$
	$\mathrm{s}(t)\cosh(\Omega t)$	$\overset{L}{\circ\!-\!\bullet}$	$\frac{p}{p^2-\Omega^2}$	$(Re(p)>0)$
	$\mathrm{s}(t)\,\mathrm{si}(\Omega t)$	$\overset{L}{\circ\!-\!\bullet}$	$\frac{1}{\Omega}\arctan(\frac{\Omega}{p})$	$(Re(p)>0)$
	$\mathrm{s}(t)t^n$	$\overset{L}{\circ\!-\!\bullet}$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$(Re(p)>0, \quad n=0,1,2,\ldots)$
	$\mathrm{s}(t)\frac{t}{T}$	$\overset{L}{\circ\!-\!\bullet}$	$\frac{1}{p^2T}$	$(Re(p)>0)$
	$\mathrm{s}(t)\frac{t}{T}-s(t-T)\frac{t-T}{T}$	$\overset{L}{\circ\!-\!\bullet}$	$\frac{1-e^{-pT}}{p^2T}$	$(Re(p)>0)$
	$\mathrm{s}(t)-s(t-T)$	$\overset{L}{\circ\!-\!\bullet}$	$\frac{1-e^{-pT}}{p}$	$(Re(p)>0)$
	$\mathrm{s}(t)-2s(t-T)+\mathrm{s}(t-2T)$	$\overset{L}{\circ\!-\!\bullet}$	$\frac{(1-e^{-pT})^2}{p}$	$(Re(p)>0)$
	$\mathrm{s}(t)\frac{t}{T}-\mathrm{s}(t-T)\left(1+\frac{t-T}{T}\right)$	$\overset{L}{\circ\!-\!\bullet}$	$\frac{1}{p}\left(\frac{1-e^{-pT}}{pT}-e^{-pT}\right)$	$(Re(p)>0)$
	$\mathrm{s}(t)\frac{t}{T}-2\,\mathrm{s}(t-T)\frac{t-T}{T}+\mathrm{s}(t-2T)\frac{t-2T}{T}$	$\overset{L}{\circ\!-\!\bullet}$	$\frac{(1-e^{-pT})^2}{p^2T}$	$(Re(p)>0)$
	$\mathrm{s}(t)\frac{t}{T}-\mathrm{s}(t-T)\frac{t-T}{T}-\mathrm{s}(t-2T)\frac{t-2T}{T}$	$\overset{L}{\circ\!-\!\bullet}$	$\frac{(1-e^{-pT})(1-e^{-2pT})}{p^2T}$	$(Re(p)>0)$
	$\frac{\mathrm{s}(t)}{\sqrt{\pi t}}$	$\overset{L}{\circ\!-\!\bullet}$	$\frac{1}{\sqrt{p}}$	$(Re(p)>0)$
	$\mathrm{s}(t)\sqrt{\frac{t}{\pi}}$	$\overset{L}{\circ\!-\!\bullet}$	$\frac{1}{2}p^{-3/2}$	$(Re(p)>0)$

7.4 Hilbert-Transformation

7.4.1 Definition

Zusammenhang zwischen Real- und Imaginärteil sowie Betrag und Phase des Spektrums $F(\omega)=R(\omega)+iX(\omega)=A(\omega)e^{i\varphi(\omega)}$ einer reellen Zeitfunktion $f(t)$, für die $f(t)=0 \quad \forall t<0$ gilt.

$R(\omega)=R(\infty)+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{X(y)}{\omega-y}\,\mathrm{d}y$	$X(\omega)=-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{R(y)}{\omega-y}\,\mathrm{d}y$
$A(\omega)=A(\infty)+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(y)}{\omega-y}\,\mathrm{d}y$	$\varphi(\omega)=-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{A(y)}{\omega-y}\,\mathrm{d}y$
$A(\omega)=\lvert F(\omega)\rvert=\sqrt{R^2(\omega)+X^2(\omega)}$	$\varphi(\omega)=\begin{cases}\arctan\frac{X(\omega)}{R(\omega)} & \text{für } R(\omega)>0\\ \arctan\frac{X(\omega)}{R(\omega)}\pm\pi & \text{für } R(\omega)<0\\ \frac{pi}{2}\operatorname{sgn}X(\omega) & \text{für } R(\omega)=0\end{cases}$

7.5 Z-Transformation

7.5.1 Definition

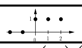
Die Z-Transformierte beschreibt das Spektrum eines abgetasteten Signals. $\boxed{(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \;\overset{Z}{\circ\!\!-\!\!\bullet}\; F_Z(z)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n z^{-n}}$

7.5.2 Eigenschaften

Sei $f_n \;\overset{Z}{\circ\!\!-\!\!\bullet}\; F_Z(z)$ und $f_{i,n} \;\overset{Z}{\circ\!\!-\!\!\bullet}\; F_i(z)$, dann:

Linearität:	$a_1f_{1,n}+a_2f_{2,n} \;\overset{Z}{\circ\!\!-\!\!\bullet}\; a_1F_1(z)+a_2F_2(z)$				
Ähnlichkeitssatz:	$a^nf_n \;\overset{Z}{\circ\!\!-\!\!\bullet}\; F(\frac{z}{a})$				$(\frac{z}{a}>R_f)$
Zeitverschiebung:	$f_{n+k} \;\overset{Z}{\circ\!\!-\!\!\bullet}\; z^k\left(F_Z(z)-\sum_{n=0}^{k-1}f_nz^{-n}\right)$				$(k>0, \lvert z\rvert>R_f)$
	$f_{n-k} \;\overset{Z}{\circ\!\!-\!\!\bullet}\; z^{-k}\Big(F_Z(z)+\underbrace{\sum_{n=-k}^{-1}f_nz^{-n}}_{=0,\ \text{falls } f_n=0\quad\forall n<0}\Big)$				
	f_{n-2}	$\overset{Z}{\circ\!\!-\!\!\bullet}$	$z^{-2}\left(F_Z(z)+f_{-1}z+f_{-2}z^2\right)$	$=F_Z(z)z^{-2}+f_{-1}z^{-1}+f_{-2}$	
	f_{n-1}	$\overset{Z}{\circ\!\!-\!\!\bullet}$	$z^{-1}\left(F_Z(z)+f_{-1}z\right)$	$=F_Z(z)z^{-1}+f_{-1}$	
z.B.:	f_n	$\overset{Z}{\circ\!\!-\!\!\bullet}$	$F_Z(z)$		
	f_{n+1}	$\overset{Z}{\circ\!\!-\!\!\bullet}$	$z\left(F_Z(z)-f_0\right)$	$=F_Z(z)z-f_0z$	
	f_{n+2}	$\overset{Z}{\circ\!\!-\!\!\bullet}$	$z^2\left(F_Z(z)-f_0-z^{-1}f_1\right)$	$=F_Z(z)z^2-f_0z^2-f_1z)$	
Multiplikation mit Polynom:	$f_nn^k \;\overset{Z}{\circ\!\!-\!\!\bullet}\; (-z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z})^kF_Z(z)$				

7.5.3 Beispiele

f_n		$F_Z(z)$	
$\delta(n)$	$\overset{Z}{\circ\!\!-\!\!\bullet}$	1	
 $\mathrm{s}(n)$	$\overset{Z}{\circ\!\!-\!\!\bullet}$	$\frac{z}{z-1}$	$(\lvert z\rvert>1)$
$\mathrm{s}(n)(-1)^n$	$\overset{Z}{\circ\!\!-\!\!\bullet}$	$\frac{z}{z+1}$	
$\mathrm{s}(n)a^n$	$\overset{Z}{\circ\!\!-\!\!\bullet}$	$\frac{z}{z-a}$	$(\lvert z\rvert>\lvert a\rvert)$
$\mathrm{s}(n)na^{n-1}$	$\overset{Z}{\circ\!\!-\!\!\bullet}$	$\frac{z}{(z-a)^2}$	$(\lvert z\rvert>\lvert a\rvert)$
$\mathrm{s}(n)na^n$	$\overset{Z}{\circ\!\!-\!\!\bullet}$	$\frac{az}{(z-a)^2}$	$(\lvert z\rvert>\lvert a\rvert)$
$\mathrm{s}(n)n^2a^n$	$\overset{Z}{\circ\!\!-\!\!\bullet}$	$\frac{az(z+a)}{(z-a)^3}$	$(\lvert z\rvert>\lvert a\rvert)$
$\mathrm{s}(n)n$	$\overset{Z}{\circ\!\!-\!\!\bullet}$	$\frac{z}{(z-1)^2}$	$(\lvert z\rvert>1)$
$\mathrm{s}(n)n^2$	$\overset{Z}{\circ\!\!-\!\!\bullet}$	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$	$(\lvert z\rvert>1)$
$\mathrm{s}(n)n^3$	$\overset{Z}{\circ\!\!-\!\!\bullet}$	$\frac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}$	$(\lvert z\rvert>1)$
$\mathrm{s}(n)n^4$	$\overset{Z}{\circ\!\!-\!\!\bullet}$	$\frac{z(z^3+11z^2+11z+1)}{(z-1)^5}$	$(\lvert z\rvert>1)$
$\mathrm{s}(n)n^k$	$\overset{Z}{\circ\!\!-\!\!\bullet}$	$(-z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z})^k\frac{z}{z-1}$	
$\mathrm{s}(n)\binom{n}{k}$	$\overset{Z}{\circ\!\!-\!\!\bullet}$	$\frac{z}{(z-1)^{k+1}}$	$(\lvert z\rvert>1)$
$\mathrm{s}(n)\binom{n}{k}a^{n-k}$	$\overset{Z}{\circ\!\!-\!\!\bullet}$	$\frac{z}{(z-a)^{k+1}}$	$(\lvert z\rvert>\lvert a\rvert)$

f_n		$F_Z(z)$	
$\mathrm{s}(n)\cos(n\Omega)$	$\overset{Z}{\circ\!\!-\!\!\bullet}$	$\frac{z(z-\cos\Omega)}{z^2-2z\cos\Omega+1}$	
$\mathrm{s}(n)\sin(n\Omega)$	$\overset{Z}{\circ\!\!-\!\!\bullet}$	$\frac{z\sin\Omega}{z^2-2z\cos\Omega+1}$	
$\mathrm{s}(n)n\cos(n\Omega)$	$\overset{Z}{\circ\!\!-\!\!\bullet}$	$\frac{z((z^2+1)\cos\Omega-2z)}{(z^2-2z\cos\Omega+1)^2}$	
$\mathrm{s}(n)n\sin(n\Omega)$	$\overset{Z}{\circ\!\!-\!\!\bullet}$	$\frac{z(z^2-1)\sin\Omega}{(z^2-2z\cos\Omega+1)^2}$	
$\mathrm{s}(n)a^n\cos(n\Omega)$	$\overset{Z}{\circ\!\!-\!\!\bullet}$	$\frac{z(z-a\cos\Omega)}{z^2-2az\cos\Omega+a^2}$	
$\mathrm{s}(n)a^n\sin(n\Omega)$	$\overset{Z}{\circ\!\!-\!\!\bullet}$	$\frac{za\sin\Omega}{z^2-2az\cos\Omega+a^2}$	
$\mathrm{s}(n)a^n\sin((n-1)\Omega)$	$\overset{Z}{\circ\!\!-\!\!\bullet}$	$\frac{z(2a\cos\Omega-z)\sin\Omega}{z^2-2az\cos\Omega+a^2}$	
$\mathrm{s}(n)\cos(n\Omega+b)$	$\overset{Z}{\circ\!\!-\!\!\bullet}$	$\frac{z(\cos b(z-\cos\Omega)-\sin b\sin\Omega)}{z^2-2z\cos\Omega+1}$	
$\mathrm{s}(n)\sin(n\Omega+b)$	$\overset{Z}{\circ\!\!-\!\!\bullet}$	$\frac{z(\cos b\sin\Omega+\sin b(z-\cos\Omega))}{z^2-2z\cos\Omega+1}$	
$\mathrm{s}(n)\cosh(n\Omega)$	$\overset{Z}{\circ\!\!-\!\!\bullet}$	$\frac{z(z-\cosh\Omega)}{z^2-2z\cosh\Omega+1}$	
$\mathrm{s}(n)\sinh(n\Omega)$	$\overset{Z}{\circ\!\!-\!\!\bullet}$	$\frac{z\sinh\Omega}{z^2-2z\cosh\Omega+1}$	
$\mathrm{s}(n)a^n\cosh(n\Omega)$	$\overset{Z}{\circ\!\!-\!\!\bullet}$	$\frac{z(z-a\cosh\Omega)}{z^2-2az\cosh\Omega+a^2}$	
$\mathrm{s}(n)a^n\sinh(n\Omega)$	$\overset{Z}{\circ\!\!-\!\!\bullet}$	$\frac{az\sinh\Omega}{z^2-2az\cosh\Omega+a^2}$	
$\mathrm{s}(n)a^n\sinh((n-1)\Omega)$	$\overset{Z}{\circ\!\!-\!\!\bullet}$	$\frac{z(2a\cosh\Omega-z)\sinh\Omega}{z^2-2az\cosh\Omega+a^2}$	
$\frac{\mathrm{s}(n)}{n!}$	$\overset{Z}{\circ\!\!-\!\!\bullet}$	$e^{1/z}$	
$\mathrm{s}(n)\cos(n\arccos a)$	$\overset{Z}{\circ\!\!-\!\!\bullet}$	$\frac{z(z-a)}{z^2-2az+1}$	
$\mathrm{s}(n-1)\frac{1}{n}$	$\overset{Z}{\circ\!\!-\!\!\bullet}$	$\ln\frac{1}{z-1}$	$(\lvert z\rvert>1)$
$\mathrm{s}(n-1)\frac{(-1)^{n-1}}{n}$	$\overset{Z}{\circ\!\!-\!\!\bullet}$	$\ln\frac{z+1}{z}$	
$\mathrm{s}(n)\frac{a^n}{n!}$	$\overset{Z}{\circ\!\!-\!\!\bullet}$	$e^{a/z}$	

8 Schaltungen

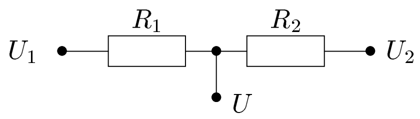
8.1 komplexe Widerstände

$\boxed{U = ZI}$ $\boxed{I = YU}$

	ohmscher Widerstand	Spule mit Induktivität L	Kondensator mit Kapazität C
Widerstand	$Z = R$	$Z_L = j\omega L$	$Z_C = \frac{1}{j\omega C}$
Leitwert	$Y = \frac{1}{R}$	$Y_L = \frac{1}{j\omega L}$	$Y_C = j\omega C$

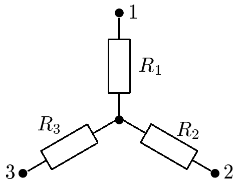
mit $\omega = 2\pi f$

8.2 Spannungsteiler

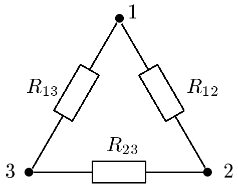


$$\boxed{U = U_1 \frac{R_2}{R_1 + R_2} + U_2 \frac{R_1}{R_1 + R_2}}$$

8.3 Stern-Dreieck Umwandlung



$\Leftrightarrow$

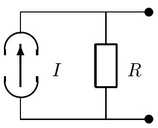


$$\boxed{R_1 = \frac{R_{12}R_{13}}{R_{12} + R_{23} + R_{13}}}$$

$$\boxed{R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3}}$$

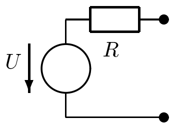
8.4 Strom-Spannungsquellen Umwandlung

Stromquelle



$\Leftrightarrow$

Spannungsquelle



$\boxed{U = RI}$

8.5 Netzwerkanalyse

8.5.1 Knotenanalyse

- gegeben: Netzwerk mit k Knoten
- Vorbereitung: Spannungsquellen in Stromquellen umwandeln
- LGS aufstellen: $\boxed{\begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & \dots & G_{1n} \\ G_{21} & G_{22} & \dots & G_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{n1} & G_{n2} & \dots & G_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{pmatrix}}$, wobei

  $n = k - 1$

  $G_{ij} = \begin{cases} \text{Summe aller Leitwerte am Knoten } i & \text{, für } i = j \\ \underline{\text{negativer}} \text{ Leitwert zwischen den Knoten } i \text{ und } j & \text{, für } i \neq j \end{cases}$

  I_i = in den Knoten i hineinfließender Strom
- Lösung: LGS nach der gesuchten Spannung U_i auflösen

8.5.2 Maschenanalyse

- gegeben: Netzwerk mit k Knoten und z Zweigen
- Vorbereitung: Stromquellen in Spannungsquellen umwandeln
- Baum festlegen: suche einen Baum, der alle Knoten verbindet (keine geschlossenen Schleifen !)
- Maschenströme festlegen: $n = z - k + 1$ linear unabhängige, geschlossene Maschenströme $I_1, \dots I_n$ festlegen
- LGS aufstellen: $\boxed{\begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1n} \\ R_{21} & R_{22} & \dots & R_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{n1} & R_{n2} & \dots & R_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{pmatrix}}$, wobei

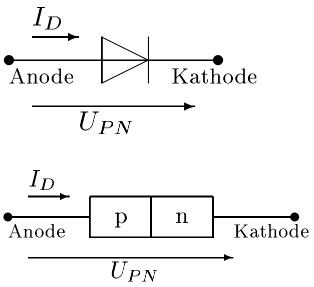
$$R_{ij} = \begin{cases} \text{Summe aller Widerstände der Masche } i & \text{, für } i = j \\ \text{Summe aller von } I_i \text{ und } I_j \text{ gleichsinnig durchflossener Widerstände} & \\ \qquad\qquad \text{minus gegensinnig durchflossener Widerstände} & \text{, für } i \neq j \end{cases}$$

U_i = Summe der Spannungen der gegensinnig durchlaufenen minus gleichsinnig durchlaufenen Spannungsquellen

- Lösung: LGS nach den gesuchten Maschenströmen I_i auflösen

8.6 Diode

8.6.1 Diodengleichung



$$\boxed{I_D = I_S(e^{\frac{U_{PN}}{nU_T}} - 1)}$$

q_e ... Elementarladung
k ... Boltzmann-Konstante
T ... Temperatur
n ... Idealitätsfaktor $(1{,}05 \ldots 1{,}5)$
I_S ... Sperrsättigungsstrom
$U_T = \frac{kT}{q_e}$ ... Temperaturspannung

8.6.2 Diodenkapazität

$\boxed{C = C_j + C_d}$ mit

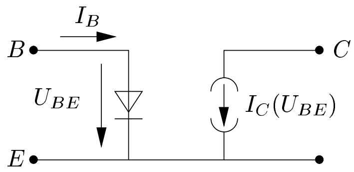
- Sperrschichtkapazität $\boxed{C_j = C_{j0}(1 - \frac{U_{PN}}{\Phi_i})^{-M}}$
- Diffusionskapazität $\boxed{C_d = \tau_T \frac{1}{nU_T} I_S e^{\frac{1}{nU_T} U_{PN}}}$

$C_{j0} \approx 60\,\text{fF}$
$\Phi_i \approx 0{,}8\,\text{V}$ ... Diffusionsspannung
$M \approx 0{,}5$ ... Kapazitätskoeffizent
$\tau_T \approx 50\,\text{ps}$ ... Transitzeit
$U_T = \frac{kT}{q_e}$ ... Temperaturspannung

8.7 Bipolartransistor

	NPN	PNP
Normalbetrieb	$I_C = I_S\left(e^{\frac{U_{BE}}{U_T}} - 1\right)$ $I_B = \frac{I_S}{\beta_N}\left(e^{\frac{U_{BE}}{U_T}} - 1\right)$	$I_C = -I_S\left(e^{\frac{-U_{BE}}{U_T}} - 1\right)$ $I_B = \frac{-I_S}{\beta_N}\left(e^{\frac{-U_{BE}}{U_T}} - 1\right)$
Inversbetrieb	$I_C = I_S\left(1 - e^{\frac{U_{BC}}{U_T}}\right)$ $I_B = \frac{I_S}{\beta_I}\left(e^{\frac{U_{BC}}{U_T}} - 1\right)$	$I_C = -I_S\left(1 - e^{\frac{-U_{BC}}{U_T}}\right)$ $I_B = \frac{-I_S}{\beta_I}\left(e^{\frac{-U_{BC}}{U_T}} - 1\right)$

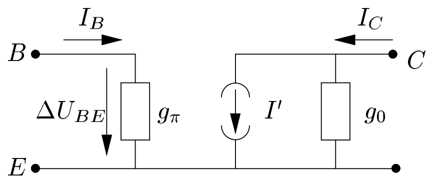
Einfaches Ersatzschaltbild:

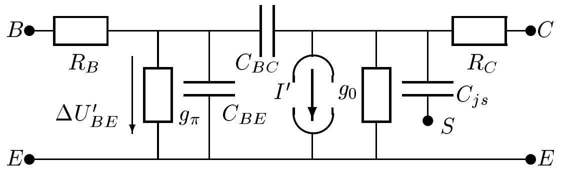


Stromverstärkung $\boxed{\beta = \frac{I_C}{I_B}}$

Temperaturspannung $U_T = \frac{kT}{q_e}$

Kleinsignal-Ersatzschaltbilder:





$\boxed{I' = g_m \Delta U'_{BE}}$

8.8 Feldeffekt-Transistor

	n-Kanal	p-Kanal
Sperrbereich	$I_D = 0$ für $U_{GS} - U_{Tn} \leq 0$	$I_D = 0$ für $U_{GS} - U_{Tp} \geq 0$
Triodenbereich	$I_D = \beta((U_{GS} - U_p)U_{DS} - \frac{1}{2}U_{DS}^2)$ für $0 < U_{DS} < U_{GS} - U_{Tn}$	$I_D = -\beta((U_{GS} - U_p)U_{DS} - \frac{1}{2}U_{DS}^2)$ für $0 > U_{DS} > U_{GS} - U_{Tp}$
Sättigungsbereich	$I_D = \frac{1}{2}\beta(U_{GS} - U_p)^2$ für $0 < U_{GS} - U_{Tn} < U_{DS}$	$I_D = -\frac{1}{2}\beta(U_{GS} - U_p)^2$ für $0 > U_{GS} - U_{Tp} > U_{DS}$

$\boxed{\beta_n = k_n \frac{W_n}{L}}$

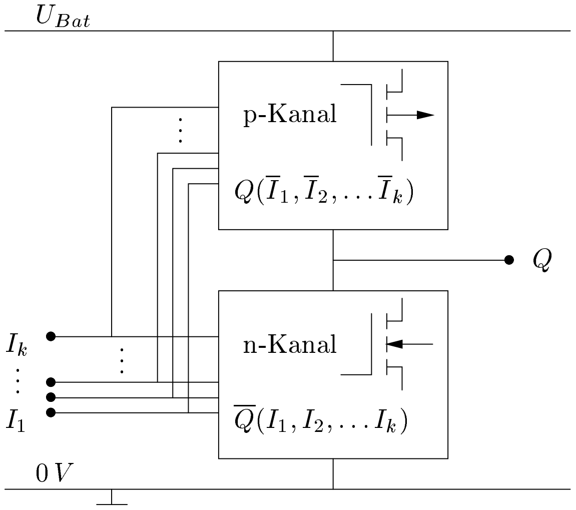
$\boxed{k_n = \mu_n C'_{OX}}$

$\boxed{\beta_p = k_p \frac{W_p}{L}}$

$\boxed{k_p = \mu_p C'_{OX}}$

8.9 beliebige Logikschaltungen mit statischem CMOS

Schaltbild:

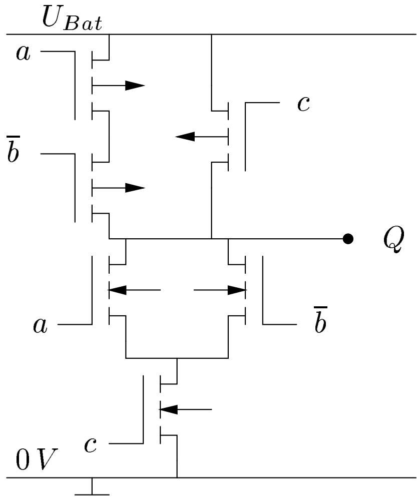


Realisierung der Logik-Verknüpfungen:
- UND → Serienschaltung
- ODER → Parallelschaltung

Beispiel: $Q = (\overline{a}b + \overline{c})$

$Q = (\overline{a}b + \overline{c}) = (\overline{a}\overline{(\overline{b})} + \overline{c})$

$\overline{Q} = (a + \overline{b})c$



8.9.1 interne Lastkapazitäten bei CMOS-Logikschaltungen

1. für den n-Kanal- und den p-Kanal-Zweig jeweils eine getrennte worst-case-Abschätzung machen, so dass
   - nur ein Strompfad leitet
   - möglichst viele Kapazitäten umgeladen werden müssen
2. es werden nur Kapazitäten berücksichtigt, die entweder
   - direkt mit dem Ausgang verbunden sind oder
   - ihren Ladestrom von dem Strom abzweigen, durch den die Kapazitäten am Ausgang umgeladen werden
3. wenn der Drain-Anschluss des einen und der Source-Anschluss des anderen Transistors direkt verbunden sind und von diesem Knoten keine weiteren Anschlüsse abgehen, dann wird die Junction-Kapazität (C_j) nur mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ berücksichtigt
4. werden Kapazitäten zweifach umgeladen (also von $+U_{DD}$ nach $-U_{DD}$), dann werden diese mit dem Faktor 2 gewertet
5. alle Kapazitäten aus den jeweiligen Abschätzungen werden nun zu $C_{L,int}$ addiert, dabei gelten folgende Gleichungen bzw. Abschätzungen:

$\boxed{C_{GSn} = mC_{GS}}$ $\boxed{C_{GSp} = \beta_r m C_{GS}}$

$\boxed{C_{GDn} = m\frac{2}{3}C_{GS}}$ $\boxed{C_{GDp} = \beta_r m\frac{2}{3}C_{GS}}$

$\boxed{C_{jn} = m\frac{2}{3}C_{GS}}$ $\boxed{C_{jp} = \beta_r m\frac{2}{3}C_{GS}}$

$\boxed{\beta_r = \frac{W_p}{W_n} \approx 2}$ $\boxed{C_{OX} = C'_{OX}W_nL}$

$\boxed{C_{GS} \approx \frac{2}{3}C_{OX}}$ (im Sättigungsbereich)

C_{GS} ... Kapazität zwischen Gate und Source
C_{GD} ... Kapazität zwischen Gate und Drain
C_j ... Kapazität zwischen Gate/Source-Anschluss und Masse
W ... Weite des Transistors
L ... Länge des Transistors
m ... Anzahl der in Reihe geschalteten Transistoren im stromführenden Pfad

9 elektromagnetische Felder

9.1 Grundgleichungen

9.1.1 Maxwell-Gleichungen

Nr.	differentiell	integral	
1.	$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$	$\oint\limits_{s=\partial a} \vec{H}\,\mathrm{d}\vec{s} = \iint\limits_{a} (\vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t})\,\mathrm{d}\vec{a}$	Durchflutungsgesetz
2.	$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$	$\int\limits_{s=\partial a} \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{a} \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{a}$	Induktionsgesetz
3.	$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$	$\oiint\limits_{a} \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{a} = 0$	Quellenfreiheit des Magnetfeldes
4.	$\mathrm{div}\,\vec{D} = \rho$	$\oiint\limits_{a} \vec{D}\,\mathrm{d}\vec{a} = \iiint\limits_{V} \rho\,\mathrm{d}V$	Gaußsches Gesetz

9.1.2 Materialgleichungen

$$\boxed{\vec{D} = \epsilon\vec{E} = \epsilon_0\epsilon_r\vec{E} = \epsilon_0(1+\chi)\vec{E} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P}}$$

$$\boxed{\vec{B} = \mu\vec{H} = \mu_0\mu_r\vec{H} = \mu_0(1+\chi_m)\vec{H} = \mu_0\vec{H} + \vec{M}}$$

$$\boxed{\vec{J} = \kappa\vec{E}}$$

9.1.3 elektrisches Feld

Potential: $\boxed{\varphi(\vec{r}) = \varphi_0 - \int\limits_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r})\,\mathrm{d}\vec{s}}$ Potential-Differentialgleichung $\boxed{\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon}}$

el. Feldstärke: $\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = -\operatorname{grad}\varphi(\vec{r}) - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}}$ elektrische Spannung: $\boxed{U_{12} = \int\limits_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E}(\vec{r})\,\mathrm{d}\vec{s}}$

el. Ladung: $\boxed{Q = \oint\limits_{a=\partial V} \vec{D}\,\mathrm{d}\vec{a} = \iiint\limits_{V} \rho\,\mathrm{d}V = \iint\limits_{a} \sigma\,\mathrm{d}a = \int\limits_{s} q\,\mathrm{d}s}$

Kirchhoffscher Satz: $\boxed{\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0}\iiint\limits_{V'} \rho(\vec{r}')G(\vec{r},\vec{r}')\,\mathrm{d}V' + \oiint\limits_{a'} \frac{\partial\varphi(\vec{r}')}{\partial n'}G(\vec{r},\vec{r}')\,\mathrm{d}a' - \oiint\limits_{a'} \varphi(\vec{r}')\frac{\partial G(\vec{r},\vec{r}')}{\partial n'}\,\mathrm{d}a'}$

$$\boxed{\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\iiint\limits_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,\mathrm{d}V' + \frac{1}{4\pi}\oiint\limits_{a'} \frac{\frac{\partial\varphi(\vec{r}')}{\partial n'}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,\mathrm{d}a' - \frac{1}{4\pi}\oiint\limits_{a'} \varphi(\vec{r}')\frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right)\mathrm{d}a'}$$

Ladungserhaltung: $\boxed{\operatorname{div}\vec{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0}$ $\boxed{\operatorname{div}\vec{k} + \frac{\partial\sigma}{\partial t} = 0}$

9.1.4 Magnetfeld

mg. Flussdichte: $\boxed{\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}}$ $\boxed{\operatorname{div}\vec{A} = 0}$ $\boxed{\Delta\vec{A} = -\mu\vec{J}}$

mg. Fluss: $\boxed{\Phi = \iint\limits_{a} \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{a} = \iint\limits_{a} \operatorname{rot}\vec{A}\,\mathrm{d}\vec{a} = \oint\limits_{s=\partial a} \vec{A}\,\mathrm{d}\vec{s}}$

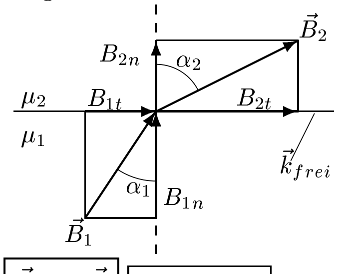
$$\boxed{\vec{H} = -\operatorname{grad}\Psi}$$

9.1.5 Induktionsgesetz

- durch Flussänderung: $\boxed{U_i = \frac{-\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}}$ mit $\boxed{\Phi = \iint\limits_{a} \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{a}}$
- durch Bewegung: $\boxed{U_i = \int\limits_{s} \vec{E}_i\,\mathrm{d}\vec{s}}$ mit $\boxed{\vec{E}_i = \vec{v}\times\vec{B}}$

9.1.6 Verhalten an Grenzflächen

Magnetfeld:



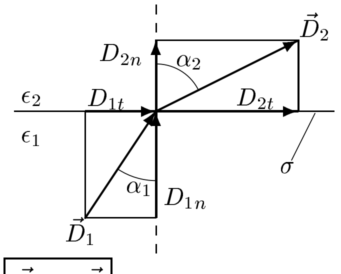
$\boxed{\vec{B} = \mu\vec{H}}$ $\boxed{B_{1n} = B_{2n}}$

$\boxed{A_{1t} = A_{2t}}$ $\boxed{A_{1n} = A_{2n}}$

$\boxed{\frac{\tan\alpha_1}{\tan\alpha_2} = \frac{B_{1t}}{B_{2t}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}}$

- idealer Leiter: $\boxed{\vec{k}_{frei} = \vec{n}_{12}\times(\vec{H}_2 - \vec{H}_1)}$
- Isolator: $\boxed{\vec{k}_{frei} = 0}$ $\boxed{H_{1t} = H_{2t}}$

Elektrisches Feld:

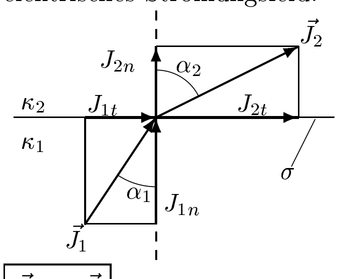


$\boxed{\vec{D} = \epsilon\vec{E}}$

$\boxed{E_{1t} = E_{2t}}$ $\boxed{D_{1n} + \sigma = D_{2n}}$

$\boxed{\frac{\tan\alpha_1}{\tan\alpha_2} = \frac{\frac{\sigma}{E_{1n}} + \epsilon_1}{\epsilon_2}}$

elektrisches Strömungsfeld:



$\boxed{\vec{J} = \kappa\vec{E}}$

- nicht stationär: $\boxed{J_{1n} = J_{2n} + \frac{\partial\sigma}{\partial t}}$
- stationär:

$\boxed{J_{1n} = J_{2n}}$ $\boxed{\frac{J_{1t}}{J_{2t}} = \frac{\kappa_1}{\kappa_2}}$ $\boxed{\frac{\tan\alpha_1}{\tan\alpha_2} = \frac{\kappa_1}{\kappa_2}}$

Speziell an Grenzfläche Isolator — idealer Leiter: $\boxed{E_t = 0}$ $\boxed{B_n = 0}$

9.1.7 Biot-Savartsches Gesetz

Magnetfeld einer beliebigen geschlossenen Stromschleife:

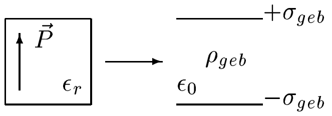
$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint\limits_{V'} \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \, \mathrm{d}V'}$ $\boxed{\vec{B} = \frac{-\mu_0 I}{4\pi} \oint\limits_{s'} \frac{(\vec{r}-\vec{r}') \times \mathrm{d}\vec{s}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}}$ $\boxed{\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint\limits_{s'} \frac{\mathrm{d}\vec{s}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}}$

9.1.8 Polarisation

Polarisation: $\boxed{\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}}$

Polarisationsstromdichte: $\boxed{\vec{J}_{geb} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}}$

Feldberechnung mit Ersatzladungen:



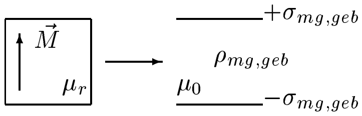
- im Innenraum: $\boxed{\rho_{geb}(\vec{r}) = -\operatorname{div} \vec{P}(\vec{r})}$
- auf der Oberfläche: $\boxed{\sigma_{geb} = \vec{P}\vec{n}}$
- aus freien und gebundenen Ladungen $\vec{E}$ berechnen
- $\vec{D}$ berechnen : $\boxed{\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}}$

9.1.9 Magnetisierung

Magnetisierung $\boxed{\vec{M} = \mu_0 \chi_m \vec{H}}$

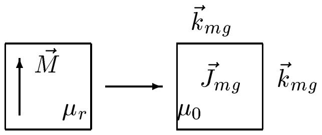
direkte Feldberechnung: $\boxed{\vec{A} = \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{V'} \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \, \mathrm{d}V'}$

Feldberechnung mit magnetischen Ersatzladungen:



- im Innenraum: $\boxed{\rho_{mg,geb}(\vec{r}) = -\operatorname{div} \vec{M}(\vec{r})}$
- auf der Oberfläche: $\boxed{\sigma_{mg,geb} = \vec{M}\vec{n}}$
- aus freien und gebundenen mg. Ladungen $\vec{H}$ berechnen
- $\vec{B}$ berechnen : $\boxed{\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M}}$

Feldberechnung mit Ersatzströmen:



- im Innenraum: Magnetisierungsstromdichte: $\boxed{\vec{J}_{mg} = \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \vec{M}(\vec{r})}$
- auf der Oberfläche: Flächenmagnetisierungsstrom: $\boxed{\vec{k}_{mg} = \frac{1}{\mu_0} \vec{M}(\vec{r}) \times \vec{n}}$

9.1.10 Kapazität

Kapazität: $\boxed{C = \frac{Q}{U}}$

Kapazität eines Plattenkondensators mit den Flächen A und Plattenabstand d: $\boxed{C = \frac{A\epsilon}{d}}$

Kapazität eines Kugelkondensators mit den Radien r_i und r_a: $\boxed{C = \frac{4\pi\epsilon}{(1/r_i - 1/r_a)}}$

Kapazität eines Zylinderkondensators mit den Radien r_i, r_a und der Länge l: $\boxed{C = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln(r_a/r_i)}}$

9.1.11 Induktivität

Induktivität: $\boxed{L = \frac{\Phi}{I}}$ mit $\boxed{\Phi = \iint\limits_{a} \vec{B} \, \mathrm{d}\vec{a}}$

spezifische Induktivität einer unendlich langen Spule: $\boxed{L' = \mu_0 N'^2 r_0^2 \pi}$

9.1.12 Kraft

Kraft auf Ladungen: $\boxed{\vec{F} = \vec{E}Q}$ Lorenzkraft: $\boxed{\vec{F} = Q\left(\vec{v} \times \vec{B}\right)}$ $\Rightarrow$ Gesammtkraft: $\boxed{\vec{F} = Q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)}$

Kraft auf stromdurchflossene Leiter der Länge l: $\boxed{\vec{F} = l(\vec{I} \times \vec{B})}$

9.1.13 Energie

- Energie eines Magnetfeldes: $\boxed{W = \frac{1}{2}\iiint\limits_V \vec{B}\vec{H}\,\mathrm{d}V}$
- Energie eines elektrischen Feldes: $\boxed{W = \frac{1}{2}\iiint\limits_V \vec{E}\vec{D}\,\mathrm{d}V}$
- Energiesatz: $\boxed{\oiint\limits_a \vec{S}\,\mathrm{d}\vec{a} + \frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_V \frac{\epsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2}\,\mathrm{d}V + \iiint\limits_V \frac{J^2}{\kappa}\,\mathrm{d}V = 0}$ $\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\epsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2}\right) + \frac{J^2}{\kappa} + \operatorname{div}\vec{S} = 0}$
- Energieflußdichte (Poynting-Vektor): $\boxed{\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H}}$
- Energie eines Kondensators: $\boxed{W = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}}$
- Energie einer Spule: $\boxed{W = \frac{1}{2}LI^2}$
- Energie mehrerer Induktivitäten: $\boxed{W = \frac{1}{2}\sum\limits_{i,j=1}^{n} L_{ij}I_iI_j}$
- Stromwärme: $\boxed{\frac{W}{V} = \vec{E}\vec{J} = \kappa E^2}$

9.2 Elektrische Strömungsfelder

9.2.1 Punktquelle oder Kugelquelle

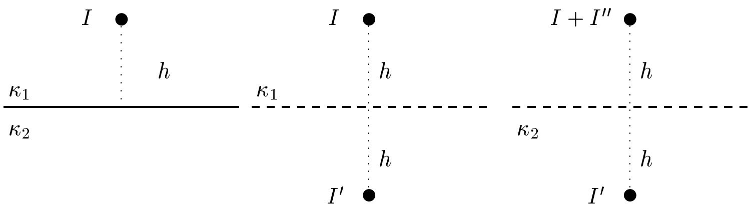
$\boxed{\vec{J} = \frac{I}{4\pi r^2}\vec{e}_r}$ $\boxed{\varphi = \frac{I}{4\pi\kappa r}}$

(Potentiale von Stömungsfeldern können von den Potentialen für analoge elektrische Felder abgeleitet werden, indem man $\frac{Q}{\epsilon}$ durch $\frac{I}{\kappa}$ ersetzt.)

9.2.2 Punktquelle an einer ebenen Mediengrenzfläche

Für die Feldberechnung kann der Einfluss der Mediengrenze im Bereich 1 durch die virtuelle Punktquellen I', im Bereich 2 durch die virtuellen Punktquellen I' und I'' berücksichtigt werden.

$\boxed{I' = I\frac{\kappa_1-\kappa_2}{\kappa_1+\kappa_2}}$ $\boxed{I'' = I\frac{2\kappa_2}{\kappa_1+\kappa_2}}$



Problemstellung — für Feld im Bereich 2 — für Feld im Bereich 2

9.3 Elektrische Felder

9.3.1 beliebige Raumladungsverteilung

ohne Randwertbedingungen:

$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\iiint\limits_V \frac{\rho(\vec{r}\,')(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\,\mathrm{d}V'}$ $\boxed{\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\iiint\limits_V \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}V'}$

mit Randwertbedingungen:

$$\boxed{\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\iiint\limits_V \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}V' + \frac{1}{4\pi}\oiint\limits_a \frac{\frac{\partial\rho(\vec{r}\,')}{\partial n'}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}a' - \frac{1}{4\pi}\oiint\limits_a \varphi(\vec{r})\frac{\partial}{\partial n'}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}a'}$$

9.3.2 beliebige Flächenladungsverteilung

$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\iint\limits_a \frac{\sigma(\vec{r}\,')(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\,\mathrm{d}a'}$ $\boxed{\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\iint\limits_a \frac{\sigma(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}a'}$

9.3.3 beliebige Linienladungsverteilung

$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\int\limits_s \frac{q(\vec{r}\,')(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\,\mathrm{d}s'}$ $\boxed{\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\int\limits_s \frac{q(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}s'}$

9.3.4 Punktladung

$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}\vec{e}_r}$ $\boxed{\varphi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon r}}$

9.3.5 Linienladung

$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{2\pi\epsilon r}\vec{e}_r}$ $\boxed{\varphi(\vec{r}) = \frac{-q}{2\pi\epsilon}\ln\frac{r}{r_B}}$ $(\varphi(r_B) = 0)$

9.3.6 kreisförmige Linienladung

Feld auf der Z-Achse einer kreisförmige Linienladung q mit Radius R in der X-Y-Ebene:

$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{qRz}{2\epsilon(R^2+z^2)^{3/2}}\vec{e}_z}$ $\boxed{\varphi(\vec{r}) = \frac{qR}{2\epsilon\sqrt{R^2+z^2}}}$

9.3.7 Ladungs-Kreisscheibe

Feld auf der Z-Achse einer kreisscheibenförmige Flächenladung σ mit Radius R in der X-Y-Ebene:

$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\sigma}{2\epsilon}\left(\operatorname{sgn} z - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)\vec{e}_z}$ $\boxed{\varphi(\vec{r}) = \frac{\sigma}{2\epsilon}\left(\sqrt{R^2+z^2} - |z|\right)}$

9.3.8 ebene Flächenladung

Feld einer unendlich ausgedehnten Flächenladung σ in der X-Y-Ebene:

$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\sigma \operatorname{sgn} z}{2\epsilon}\vec{e}_z}$ $\boxed{\varphi(\vec{r}) = \frac{-\sigma|z|}{2\epsilon}}$

9.3.9 Raumladungs-Zylinder

Feld eines in Z-Richtung unendlich ausgedehnten Raumladungszylinders (Ladungsdichte ρ) mit Radius r_0:

$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\rho r}{2\epsilon}\vec{e}_r & \text{für } r < r_0 \\ \frac{\rho r_0^2}{2\epsilon r}\vec{e}_r & \text{für } r \geq r_0 \end{cases}}$ $\boxed{\varphi(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\rho}{4\epsilon}\left(r_0^2(1 - 2\ln\frac{r_0}{r_B}) - r^2\right) & \text{für } r < r_0 \\ \frac{-\rho r_0^2}{2\epsilon}\ln\frac{r}{r_B} & \text{für } r \geq r_0 \end{cases}}$ mit $\varphi(r_B) = 0, r_B \geq r_0$

Feld eines in Z-Richtung unendlich ausgedehnten rotationssymetrischen Raumladungszylinders (Ladungsdichte $\rho(r)$) mit Radius R:

$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon r}\int_0^R \rho(r')r'\,\mathrm{d}r'\vec{e}_r}$

9.3.10 Raumladungs-Kugel

Feld einer Raumladungskugel (Ladungsdichte ρ) mit Radius R:

$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\rho r}{3\epsilon}\vec{e}_r & \text{für } r < R \\ \frac{\rho R^3}{3\epsilon r^2}\vec{e}_r & \text{für } r \geq R \end{cases}}$ $\boxed{\varphi(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\rho R^2}{2\epsilon}\left(1 - \frac{1}{3}\left(\frac{r}{R}\right)^2\right) & \text{für } r < R \\ \frac{\rho R^3}{3\epsilon r} & \text{für } r \geq R \end{cases} \quad (\varphi(\infty) = 0)}$

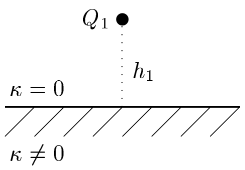
Feld einer kugelsymetrischen Raumladungskugel (Ladungsdichte $\rho(r)$) mit Radius R:

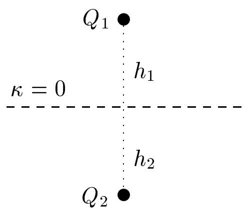
$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon r^2}\int_0^R \rho(r')r'^2\,\mathrm{d}r'\vec{e}_r}$

9.3.11 Punktladung vor leitfähiger Ebene

Für die Feldberechnung im Isolator kann der Einfluss der leitfähigen Ebene durch eine virtuelle Ladung Q_2 berücksichtigt werden.

$\boxed{Q_2 = -Q_1}$ $\boxed{h_2 = h_1}$

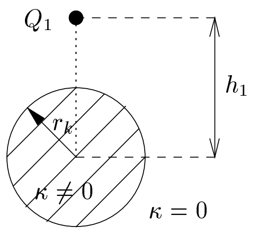


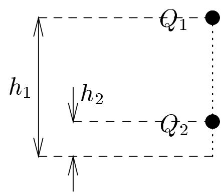


9.3.12 Punktladung vor leitfähiger Kugel

Für die Feldberechnung im Isolator kann der Einfluss der leitfähigen Kugel durch eine virtuelle Ladung Q_2 berücksichtigt werden.

$\boxed{Q_2 = -Q_1\sqrt{\frac{h_2}{h_1}} = -Q_1\frac{r_k}{h_1}}$ $\boxed{h_2 = \frac{r_k^2}{h_1}}$

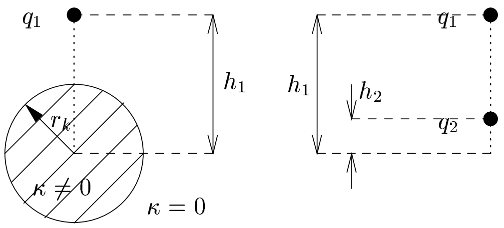




9.3.13 Linienladung vor leitfähigem Zylinder

Für die Feldberechnung im Isolator kann der Einfluss des leitfähigen Zylinders durch eine virtuelle Linienladung q_2 berücksichtigt werden.

$\boxed{q_2 = -q_1}$ $\boxed{h_2 = \frac{r_z^2}{h_1}}$



9.3.14 elektrischer Dipol

Dipol $\vec{p}$ bei $\vec{r} = \vec{r}_1$: $\boxed{\varphi(\vec{r}) = \frac{\vec{p}(\vec{r}-\vec{r}_1)}{4\pi\epsilon|\vec{r}-\vec{r}_1|^3} = \frac{p\cos\theta}{4\pi\epsilon|\vec{r}-\vec{r}_1|^2}}$ $(\theta = \angle(\vec{p}, \vec{r} - \vec{r}_1))$

Dipol $\vec{p} = p\vec{e}_z$ im Ursprung: $\boxed{\varphi(\vec{r}) = \frac{p\cos\Theta}{4\pi\epsilon r^2}}$ $\boxed{E_r = \frac{p\cos\Theta}{2\pi\epsilon r^3}}$ $\boxed{E_\Theta = \frac{p\sin\Theta}{4\pi\epsilon r^3}}$ $\boxed{E_\varphi = 0}$

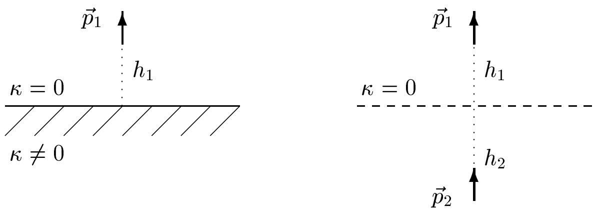
Liniendipol $\vec{p}\,' = p'\vec{e}_x$ auf der z-Achse: $\boxed{\varphi(\vec{r}) = \frac{p'\cos\varphi}{2\pi\epsilon R}}$ $\boxed{E_R = \frac{p'\cos\varphi}{2\pi\epsilon R^2}}$ $\boxed{E_\varphi = \frac{p'\sin\varphi}{2\pi\epsilon R^2}}$ $\boxed{E_z = 0}$

bel. Dipol-Volumendichte $\vec{P}_V = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}V}$: $\boxed{\varphi(\vec{r}) = \iiint\limits_{V'} \frac{-\operatorname{div}\vec{P}_V(\vec{r}\,')}{4\pi\epsilon|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}V' + \iint\limits_{a'} \frac{\vec{P}_V(\vec{r}\,')}{4\pi\epsilon|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}a'}$

9.3.15 Dipol vor leitfähiger Ebene

Für die Feldberechnung im Isolator kann der Einfluss der leitfähigen Ebene durch einen virtuellen Dipol $\vec{p}_2$ berücksichtigt werden.

$\boxed{\vec{p}_2 = \vec{p}_1}$ $\boxed{h_2 = h_1}$



9.4 Magnetfelder

9.4.1 beliebiges Strömungsfeld

Vektorpotential: $\boxed{\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint\limits_{V'} \frac{\vec{J}(\vec{r})}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}V'}$

9.4.2 linineförmiger Strom

linienförmiger Strom auf der z-Achse: $\vec{J} = I\vec{e}_z\delta(x)\delta(y)$

$\boxed{\vec{H} = \frac{I}{2\pi r}\vec{e}_\Phi}$ $\boxed{\begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix} = \frac{I}{2\pi(x^2+y^2)} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}}$ $\boxed{\vec{A} = \frac{-\mu_0 I}{2\pi} \ln\frac{R}{R_0}\vec{e}_z}$ ($R_0 \neq 0$)

9.4.3 Kreisstrom

Kreisstrom in der x-y-Ebene mit Radius R_0 um den Ursprung

Magnetfeld auf der z-Achse: $\boxed{\vec{H}(z) = \frac{IR_0^2}{2\sqrt{R_0^2+z^2}^3}\vec{e}_z}$

magnetisches Vektorpotential: $\boxed{\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\sqrt{(R+R_0)^2+z^2}\left((1-\frac{k^2}{2})K(\frac{\pi}{2},k) - E(\frac{\pi}{2},k)\right)\vec{e}_\Phi}$

mit $\boxed{k = \frac{4RR_0}{(R+R_0)^2+z^2}}$ $\boxed{K(\frac{\pi}{2},k) = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\psi}{\sqrt{q-k^2 sin^2\psi}}}$ $\boxed{E(\frac{\pi}{2},k) = \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{q-k^2 sin^2\psi}\,\mathrm{d}\psi}$

9.4.4 unendlich lange Spule

Magnetfeld im Innern einer unendlich langen Spule (N Windungen je Längeneinheit l, Radius R_0), die vom Strom I durchflossen wird: $\boxed{H_z = IN'}$ mit $N' = \frac{N}{l}$

spezifische Induktivität der Spule: $\boxed{L' = \mu_0 N'^2 R_0^2 \pi}$

9.4.5 endlich lange Spule

Magnetfeld auf der Achse einer endlich langen Spule (N Windungen, Länge l, Radius R_0), die vom Strom I durchflossen wird: $\boxed{H_z = \frac{1}{2} I N' \left(\frac{z+l/2}{\sqrt{(z+l/2)^2+R_0^2}} - \frac{z-l/2}{\sqrt{(z-l/2)^2+R_0^2}} \right)}$ mit $N' = \frac{N}{l}$

Induktivität einer langen Spule ($l \gg R_0$): $\boxed{L = \mu_0 N'^2 R_0^2 \pi \left(\sqrt{R_0^2 + l^2} - R_0 \right)}$

9.4.6 magnetischer Dipol

Dipol $\vec{m} = m\vec{e}_z$ im Ursprung:

$\boxed{\Psi(\vec{r}) = \frac{m \cos\Theta}{4\pi\mu r^2}}$ $\boxed{H_r = \frac{m\cos\Theta}{2\pi\mu r^3}}$ $\boxed{H_\Theta = \frac{m \sin\Theta}{4\pi\mu r^3}}$ $\boxed{H_\varphi = 0}$ $\boxed{\vec{A} = \frac{m\sin\Theta}{4\pi r^2}\vec{e}_\varphi}$

9.5 Elektromagnetische Wellen

9.5.1 Wellenausbreitung in Isolatoren

- Wellengleichungen im ladungsfreien Vakuum: $\boxed{\Delta\vec{E} = \mu\epsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}}$ $\boxed{\Delta\vec{B} = \mu\epsilon\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}}$
- harmonische ebene Welle: $\boxed{\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi)}$ $\boxed{\vec{H} = \vec{H}_0 \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi)}$
- $\boxed{\vec{B} = \frac{\vec{e}_a \times \vec{E}}{c}}$ $\boxed{\vec{H} = \frac{\vec{e}_a \times \vec{E}}{Z}}$ $\boxed{\vec{E} = c(\vec{B}\times\vec{e}_a) = Z(\vec{H}\times\vec{e}_a)}$
- Dispersionsbeziehung: $\boxed{\mu\epsilon\omega^2 - k^2 = 0}$
- Wellenzahl: $\boxed{k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{Tc} = \frac{2\pi}{\lambda} = \omega\sqrt{\mu\epsilon}}$
- Wellenzahlvektor zeigt in Ausbreitungsrichtung: $\boxed{\vec{k} = \vec{e}_a k}$
- Wellenwiderstand: $\boxed{Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = c\mu = \frac{1}{c\epsilon} = \frac{k}{\epsilon\omega} = \frac{\mu\omega}{\kappa}}$
- Lichtgeschwindigkeit: $\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = f\lambda}$
- Phasengeschwindigkeit: $\boxed{v_{ph} = \frac{\omega(k)}{k}}$
- Gruppengeschwindigkeit: $\boxed{v_G = \frac{\mathrm{d}\omega(k)}{\mathrm{d}k}}$

9.5.2 Wellenausbreitung in Leitern

- $\boxed{\vec{B} = \frac{\vec{k}\times\vec{E}}{\omega}}$
- Dispersionsbeziehung: $\boxed{\mu\epsilon\omega^2 - \mu\kappa j\omega - k^2 = 0}$
- Wellenzahlvektor: $\boxed{\vec{k} = k\vec{e}_a = (\beta - j\alpha)\vec{e}_a}$ mit $\boxed{\alpha = \pm\omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}\left(\sqrt{1+\frac{\kappa^2}{\omega^2\epsilon^2}} - 1\right)}}$ $\boxed{\beta = \pm\omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}\left(\sqrt{1+\frac{\kappa^2}{\omega^2\epsilon^2}} + 1\right)}}$

9.5.3 Elektrischer Hertzscher Vektor

eletrischer Hertzscher Vektor: $\vec{\Pi}_e$

$\rightsquigarrow$ $\boxed{\vec{A} = \mu\epsilon\frac{\partial\vec{\Pi}_e}{\partial t}}$ $\boxed{\vec{B} = \mu\epsilon \,\mathrm{rot}\, \frac{\partial\vec{\Pi}_e}{\partial t}}$ $\boxed{\varphi = -\,\mathrm{div}\,\vec{\Pi}_e}$ $\boxed{\vec{E} = \mathrm{grad\ div}\,\vec{\Pi}_e - \mu\epsilon\frac{\partial^2\vec{\Pi}_e}{\partial t^2} \underbrace{=\mathrm{rot\ rot}\,\vec{\Pi}_e}_{\text{wenn } \rho=0}}$

9.5.4 Magnetischer Hertzscher Vektor

magnetischer Hertzscher Vektor: $\vec{\Pi}_m$

$\rightsquigarrow$ $\boxed{\vec{A}_e = \mu\epsilon\frac{\partial\vec{\Pi}_m}{\partial t}}$ $\boxed{\vec{D} = -\mu\epsilon \,\mathrm{rot}\, \frac{\partial\vec{\Pi}_m}{\partial t}}$ $\boxed{\varphi_m = -\,\mathrm{div}\,\vec{\Pi}_m}$ $\boxed{\vec{H} = \mathrm{grad\ div}\,\vec{\Pi}_m - \mu\epsilon\frac{\partial^2\vec{\Pi}_m}{\partial t^2}}$

9.5.5 Hertzscher Dipol

- schwingender elektrischer Dipol: $\boxed{\vec{p} = \vec{p}_0 e^{j\omega t}}$ mit $\boxed{\vec{p}_0 = \frac{\vec{l}I_0}{j\omega}}$ $\boxed{\frac{\partial\vec{p}}{\partial t} = \vec{l}I(t)}$
- zugehörige Stromfunktion: $\boxed{I(t) = I_0 e^{j\omega t}}$
- zugehöriger Hertzscher Vektor: $\boxed{\vec{\Pi}_e = \frac{\vec{p}_0}{4\pi\epsilon r} e^{j(\omega t - kr)}}$

Ist $\vec{p}$ im Ursprung des Koordinatensystems und in Richtung e_z orinentiert, dann gilt:

- $\boxed{\vec{\Pi}_e = \frac{lI_0}{4j\pi\omega\epsilon r} e^{j(\omega t - kr)}\vec{e}_z = \frac{lI_0}{4j\pi\omega\epsilon r} e^{j(\omega t - kr)}(\cos\Theta\vec{e}_r - \sin\Theta\vec{e}_\Theta)}$

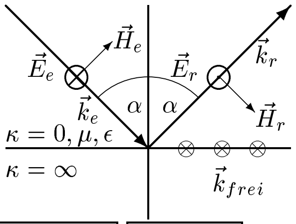
- $\boxed{\vec{A} = j\omega\mu\epsilon\vec{\Pi}_e = \frac{\mu I_0 l}{4\pi r} e^{i(\omega t - kr)} \vec{e}_z}$
- $\boxed{\vec{H} = \epsilon \operatorname{rot} \frac{\partial \vec{\Pi}_e}{\partial t} = \frac{l I_0 \sin\Theta}{4\pi} \left(\frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2}\right) e^{j(\omega t - kr)} \vec{e}_\Phi}$
- $\boxed{\varphi = -\operatorname{div} \vec{\Pi}_e = -\frac{\partial \Pi_{ez}}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{l I_0 \cos\Theta}{j 4\pi\omega\epsilon} \left(\frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2}\right) e^{j(\omega t - kr)}}$
- $\boxed{\vec{E} = \operatorname{rot}\operatorname{rot} \vec{\Pi}_e = \frac{l I_0}{4 j\pi\omega\epsilon} e^{j(\omega t - kr)} \left(2\cos\Theta\left(\frac{jk}{r^2} + \frac{1}{r^3}\right)\vec{e}_r + \sin\Theta\left(\frac{-k^2}{r} + \frac{jk}{r^2} + \frac{1}{r^3}\right)\vec{e}_\Theta\right)}$

Im Fernfeld ($r \gg \frac{1}{k}$) gilt näherungsweise:

- $\boxed{\vec{E} = \frac{-k^2 l I_0 \sin\Theta}{4 j\pi\omega\epsilon r} e^{j(\omega t - kr)} \vec{e}_\Theta}$
- $\boxed{\vec{H} = \frac{-k l I_0 \sin\Theta}{4 j\pi r} e^{j(\omega t - kr)} \vec{e}_\Phi}$
- $\boxed{E_\Theta = Z H_\Phi}$
- Leistungsabstrahlung je Fläche: $\boxed{\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = E_\Theta H_\Phi \vec{e}_r}$

9.5.6 Reflexion und Brechung von Wellen

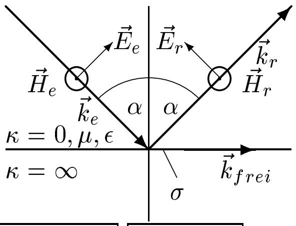
- Grenzfläche Isolator - idealer Leiter:
  - senkrechte Polarisation



$\boxed{H_r = H_e}$ $\boxed{E_r = E_e}$

$\boxed{\sigma = 0}$ $\boxed{k_{frei} = 2H_e \cos\alpha}$

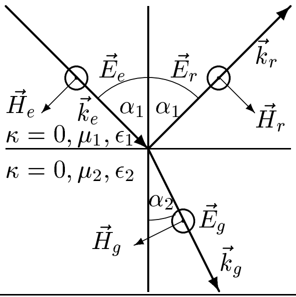
  - parallele Polarisation



$\boxed{H_r = H_e}$ $\boxed{E_r = E_e}$

$\boxed{\sigma = 2\epsilon E_e \sin\alpha}$ $\boxed{k_{frei} = 2H_e}$

- Grenzfläche Isolator - Isolator:
  - senkrechte Polarisation

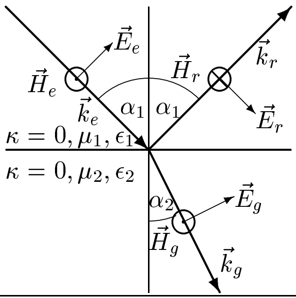


$\boxed{E_r = E_e \frac{Z_2\cos\alpha_1 - Z_1\cos\alpha_2}{Z_2\cos\alpha_1 + Z_1\cos\alpha_2}}$ $\boxed{H_r = \frac{E_r}{Z_1}}$

$\boxed{E_g = E_e \frac{2Z_2\cos\alpha_1}{Z_2\cos\alpha_1 + Z_1\cos\alpha_2}}$ $\boxed{H_g = \frac{E_g}{Z_2}}$

$\boxed{\frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1} = \frac{c_2}{c_1} = \sqrt{\frac{\mu_1\epsilon_1}{\mu_2\epsilon_2}}}$

  - parallele Polarisation



$\boxed{E_r = E_e \frac{Z_2\cos\alpha_2 - Z_1\cos\alpha_1}{Z_2\cos\alpha_2 + Z_1\cos\alpha_1}}$ $\boxed{H_r = \frac{E_r}{Z_1}}$

$\boxed{E_g = E_e \frac{2Z_2\cos\alpha_1}{Z_2\cos\alpha_2 + Z_1\cos\alpha_1}}$ $\boxed{H_g = \frac{E_g}{Z_2}}$

$\boxed{\frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1} = \frac{c_2}{c_1} = \sqrt{\frac{\mu_1\epsilon_1}{\mu_2\epsilon_2}}}$

→ Hinweis: Randbedingungen siehe *Verhalten an Grenzflächen* auf S. 20

9.6 Separation der Laplaceschen Gleichung

9.6.1 in 2-dimensionalen kartesischen Koordinaten

Laplacesche Gleichung: $\Delta\varphi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\varphi = 0$

Ansatz: $\varphi = X(x)Y(y)$

$\Rightarrow$ $\boxed{\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = -k^2 X(x)}$ $\boxed{\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = k^2 Y(y)}$ $(k \in \mathbf{R})$

Lösungen:

$$\boxed{X(x) = \begin{cases} A_0 + B_0 x & , k = 0 \\ A_k\cos(kx) + B_k\sin(kx) & , k \neq 0 \end{cases}} \qquad \boxed{Y(y) = \begin{cases} C_0 + D_0 y & , k = 0 \\ C_k\cosh(ky) + D_k\sinh(ky) & , k \neq 0 \end{cases}}$$

allgemeine Lösung:

$$\boxed{\varphi = \sum_{k=-\infty, k\neq 0}^{\infty} \left(A_k\cos(kx) + B_k\sin(kx)\right)\left(C_k\cosh(ky) + D_k\sinh(ky)\right) + (A_0 + B_0 x)(C_0 + D_0 y)}$$

9.6.2 in 3-dimensionalen kartesischen Koordinaten

Laplacesche Gleichung: $\Delta\varphi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\varphi = 0$

Ansatz: $\varphi = X(x)Y(y)Z(z)$

$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = -k^2 X(x)} \quad \boxed{\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = -l^2 Y(y)} \quad \boxed{\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} = (k^2 + l^2) Z(z)} \qquad (k, l \in \mathbf{R})$

Lösungen:

$$\boxed{X(x) = \begin{cases} A_0 + B_0 x & , k = 0 \\ A_k \cos(kx) + B_k \sin(kx) & , k \neq 0 \end{cases}} \quad \boxed{Y(y) = \begin{cases} C_0 + D_0 y & , l = 0 \\ C_k \cos(ly) + D_k \sin(ly) & , l \neq 0 \end{cases}}$$

$$\boxed{Z(z) = \begin{cases} E_0 + F_0 z & , k^2 + l^2 = 0 \\ E_k \cosh\left(\sqrt{(k^2 + l^2)} z\right) + F_k \sinh\left(\sqrt{(k^2 + l^2)} z\right) & , k^2 + l^2 \neq 0 \end{cases}}$$

allgemeine Lösung:

$$\boxed{\begin{aligned} \varphi = \sum_{k=-\infty, k\neq 0}^{\infty} (A_k \cos(kx) + B_k \sin(kx))(C_k \cos(ly) + D_k \sin(ly)) \left(E_k \cosh\left(\sqrt{(k^2 + l^2)} z\right) + F_k \sinh\left(\sqrt{(k^2 + l^2)} z\right)\right) \\ +(A_0 + B_0 x)(C_0 + D_0 y)(E_0 + F_0 z) \end{aligned}}$$

9.7 Lösen von Feldproblemen mit Hilfe von konformen Abbildungen

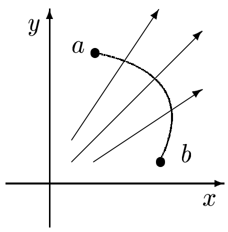
konforme Abbildung: $\boxed{w = f(z) \quad \Leftrightarrow z = f^{-1}(w)}$ $\qquad (w, z \in \mathbb{C})$ $\qquad$ (f ... analytische Funktion)

mit $\boxed{w = u + iv}$ $\boxed{z = x + iy}$

Abbildung auf Feldproblem: $\boxed{\varphi = u w_0}$ $\boxed{\psi = v w_0}$ oder $\boxed{\varphi = -v w_0}$ $\boxed{\psi = u w_0}$

Es gelten die Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen: $\boxed{\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}}$ $\boxed{\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{-\partial\psi}{\partial x}}$

elektrisches Feld: $\boxed{\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = -\operatorname{grad}\varphi = \begin{pmatrix} \frac{-\partial\varphi}{\partial x} \\ \frac{-\partial\varphi}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-\partial\psi}{\partial y} \\ \frac{\partial\psi}{\partial x} \end{pmatrix}}$



komplexe elektrische Feldstärke: $\boxed{E = E_x + iE_y}$ $\boxed{\frac{\partial f(z)}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = -E^*}$

dielektrischer Fluss durch $\overline{ab}$: $\boxed{\Omega = \Delta z \epsilon(\psi(b) - \psi(a))}$

Strom durch $\overline{ab}$: $\boxed{I = \Delta z \kappa(\psi(b) - \psi(a))}$

9.8 Vielleitersysteme

9.8.1 Potentialkoeffizenten

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{1,1} & P_{1,2} & \cdots \\ P_{2,1} & P_{2,2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \qquad P_{i,j} \text{ sind symmetrisch} : P_{i,j} = P_{j,i} \ ; \quad P_{i,j} \geq 0$$

9.8.2 Influenzkoeffizenten

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \cdots \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \qquad \text{Es gilt: } c_{i,j} = c_{j,i} \ , \ c_{i,i} > 0 \ , \ c_{i,j} < 0 \ \forall i \neq j \ , \ \sum_{i=1}^{n} c_{i,j} \geq 0$$

9.8.3 Kapazitätskoeffizenten

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} & C_{1,3} & \cdots \\ C_{2,1} & C_{2,2} & C_{2,3} & \cdots \\ C_{3,1} & C_{3,2} & C_{3,3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_1 - \varphi_2 \\ \varphi_1 - \varphi_3 \\ \vdots \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} C_{i,i} &= \sum_{j=1}^{n} c_{i,j} \geq 0 \\ C_{i,j} &= -c_{i,j} \geq 0 \ \forall i \neq j \end{aligned}$$

9.9 Felddiffusion

Diffusion eines Magnetfeldes im beiderseits unendlichen Raum in einem homogenen leitfähigen Medium

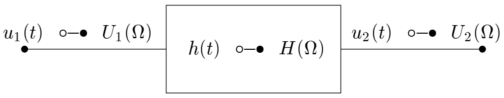
Diffusionsgleichung: $\boxed{\frac{\partial^2 B}{\partial \xi^2} = \frac{\partial B}{\partial \tau}}$ $\quad$ mit $\boxed{\xi = \frac{x}{l_0}}$ $\boxed{\tau = \frac{t}{\mu\kappa l_0^2}}$

Lösung: $\boxed{B(\xi,\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{B(\xi',0)}{\sqrt{4\pi\tau}} e^{\frac{-(\xi-\xi')^2}{4\tau}} \,\mathrm{d}\xi'}$

10 Systemtheorie

10.1 lineare Systeme

$$\boxed{u_2(t) = u_1(t) * h(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u_1(\tau) h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau}$$



$u_2(t) = u_1(t) * h(t) = u_{1(n)}(t) * h^{(n)}(t) = u_1^{(n)}(t) * h_{(n)}(t)$

für $u_1(t) = \delta(t) \quad \rightarrow \quad u_2(t) = h(t)$ (Impulsantwort)

für $u_1(t) = s(t) \quad \rightarrow \quad u_2(t) = a(t)$ (Sprungantwort)

$\delta(t) = \dot{s}(t) \qquad h(t) = \dot{a}(t) \qquad a(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} h(\tau)\,\mathrm{d}\tau$

$$\boxed{U_2(\omega) = H(\omega) U_1(\omega)}$$

10.2 Distributionen

Zwei Distributionen $g_1(t)$ und $g_2(t)$ sind distributiv gleich, falls $\int\limits_{-\infty}^{\infty} g_1(t)\Phi(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g_2(t)\Phi(t)\,\mathrm{d}t$

Zeitverschiebung: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(t-t_0)\Phi(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(t)\Phi(t+t_0)\,\mathrm{d}t$

Ähnlichkeitssatz: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(at)\Phi(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{|a|}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(t)\Phi(\frac{t}{a})\,\mathrm{d}t \qquad (a \neq 0)$

Differentiation einer Distribution: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} g^{(n)}(t)\Phi(t)\,\mathrm{d}t = (-1)^n \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(t)\Phi^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t$

10.2.1 Dirac-Impuls

Definition: $\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \neq 0 \\ \infty & \text{für } t = 0 \end{cases} \qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,\mathrm{d}t = 1$

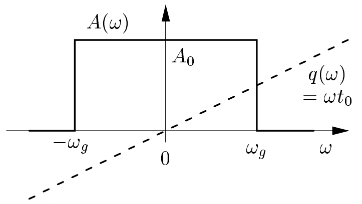
Dimension von $\delta(t)$: $[\delta(t)] = [\frac{1}{t}]$

Ausblendeigenschaft: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)\,\mathrm{d}t = f(t_0)$

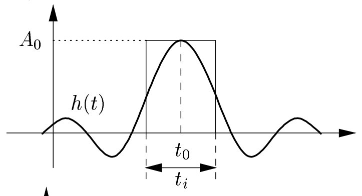
Zusammenhang mit Sprungfunktion $s(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1/2 & \text{für } t = 0 \\ 1 & \text{für } t > 0 \end{cases}$: $\dot{s}(t) = \delta(t) \qquad s^{(n)}(t) = \delta^{(n-1)}(t)$

Erzeugende: $\lim\limits_{\omega\to\infty} \frac{\sin(\omega t)}{\pi t} = \delta(t) \qquad \lim\limits_{a\to\infty} \sqrt{\frac{a}{\pi}} e^{-at^2} = \delta(t)$

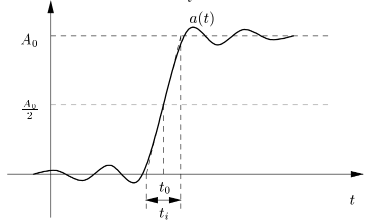
10.3 idelaler Tiefpass



$$H(\omega) = \begin{cases} A_0 e^{-i\omega t_0} & \text{für } |\omega| \leq \omega_g \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



Impulsantwort $h(t) = \frac{A_0 \omega_g}{\pi} \operatorname{si}(\omega_g (t - t_0))$
(Aproximative Impulsbreite: $t_i = \frac{\pi}{\omega_g}$)



Sprungantwort: $a(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} h(t) = \frac{A_0}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{Si}(\omega_g (t - t_0)) \right)$
(Aproximative Anstiegszeit: $t_i = \frac{\pi}{\omega_g}$ allgemein: $t_i = \frac{a(\infty)}{h(t_0)}$)

10.4 Abgetastete Signale

10.4.1 Abtastung mit Dirac-Impuls

Signal: $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ F(\omega)$ Abtastpuls: $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_A)$ $\quad (T_A = \frac{2\pi}{\omega_A})$

abgetastete Funktion : $\boxed{f_A(t) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_A)\delta(t - nT_A) \ \circ\!\!-\!\!\bullet\ F_A(\omega) = \frac{1}{T_A} \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\omega_A)}$

Signalrückgewinnung mit Tiefpass möglich, wenn Signal bandbegrenzt ist mit $\boxed{\omega_g \leq \frac{\omega_A}{2}}$

10.4.2 Exakte Abtastung

Signal: $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ F(\omega)$ Abtastpuls: $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} r_{\tau/2}(t - nT_A)$ $\quad (T_A = \frac{2\pi}{\omega_A}, \quad 0 < \tau < T_A)$

abgetastete Funktion : $\boxed{f_A(t) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} f(t) r_{\tau/2}(t - nT_A) \ \circ\!\!-\!\!\bullet\ F_A(\omega) = \frac{\tau}{T_A} \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\omega_A) \operatorname{si}(\frac{n\omega_A \tau}{2})}$

Signalrückgewinnung mit Tiefpass möglich, wenn Signal bandbegrenzt ist mit $\boxed{\omega_g \leq \frac{\omega_A}{2}}$

10.4.3 Abtastung mit beliebigem Abtastimpuls

Signal: $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ F(\omega)$ Abtastpuls: $g(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ G(\omega)$

abgetastete Funktion : $\boxed{f_A(t) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_A) g(t - nT_A) \ \circ\!\!-\!\!\bullet\ F_A(\omega) = \frac{G(\omega)}{T_A} \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\omega_A)}$ mit $\omega_A = \frac{2\pi}{T_A}$

Signalrückgewinnung möglich, falls

1. $\omega_A \geq 2\omega_g$ und
2. $G(\omega)$ keine Nullstellen in $[-\omega_g, \omega_g]$ hat.

Signalrückgewinnung mit Entzerrer-Tiefpass: $H_{ETP}(\omega) = \begin{cases} \frac{T_A}{G(\omega)} & \text{für } |\omega| \leq \omega_g \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

11 Nachrichtentechnik

11.1 Trivial Things

$\boxed{a_{\text{dB}} = x\,\text{dB} \quad \rightsquigarrow \quad a = 10^{\frac{x}{10}}}$

11.2 Mapper

$\boxed{R_s = R_b \frac{1}{\text{ld}\, L}}$

$L \ldots$ number of symbols
$R_s \ldots$ symbol rate
$R_b \ldots$ bit rate

11.3 Nyquist's 1st criteria

- time domain: $\boxed{h_n = \begin{cases} h_0 \neq 0 & ,n = 0 \\ 0 & ,else \end{cases}}$
- frequency domain: $\boxed{\frac{\omega}{2\pi} \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} H(\omega - n\omega_0) = h_0}$ $\quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad |\omega| \leq \frac{\omega_0}{2}$

11.4 Q-Function

$\boxed{Q(\alpha) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\alpha}^{\infty} e^{\frac{-x^2}{2}}\,\mathrm{d}x}$ $\quad \boxed{Q(-\infty) = 1}$ $\quad \boxed{Q(0) = \frac{1}{2}}$ $\quad \boxed{Q(\infty) = 0}$ $\quad \boxed{Q(\alpha) \approx \frac{1}{\alpha \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{\alpha^2}{2}}}$

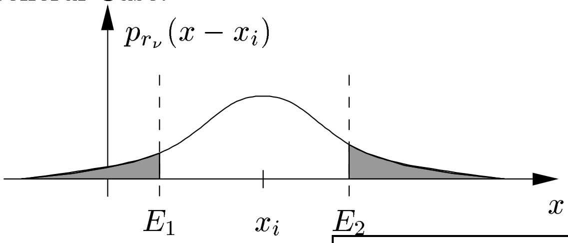
11.5 Symbol Error Probability

11.5.1 Mean Symbol Error Probability Without ISI

- noise Gaussian distributed (with zero mean) :

$\boxed{p_{r_\nu}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}}$ $\quad \boxed{P[r_\nu > x] = P[r_\nu < -x] = Q(\frac{x}{\sigma})}$

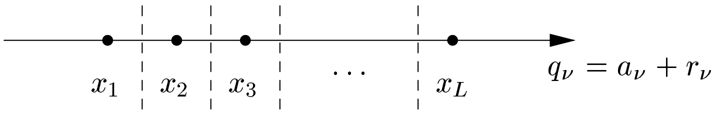
General Case:



$\sigma^2 \ldots$ variance of noise
$L \ldots$ number of symbols
$P_i \ldots$ probability of occurence of x_i

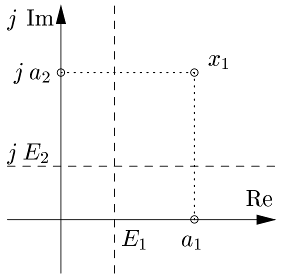
- symbol error probability : $\boxed{P_s = Q(\frac{x_i - E_1}{\sigma}) + Q(\frac{E_2 - x_i}{\sigma})}$

Equal Distances:

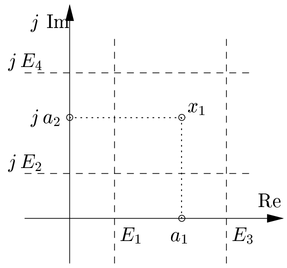


- symbol error probability : $\boxed{P_s = (2 - P_1 - P_L) Q(\frac{x_L - x_1}{2(L-1)\sigma})}$

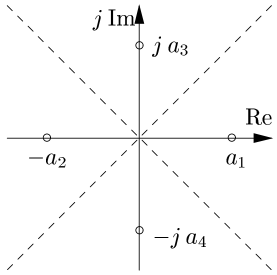
11.5.2 QAM



$$\boxed{P_{s1} = P_1 \left(1 - (1 - Q(\tfrac{a_1 - E_1}{\sigma}))(1 - Q(\tfrac{a_2 - E_2}{\sigma}))\right)}$$

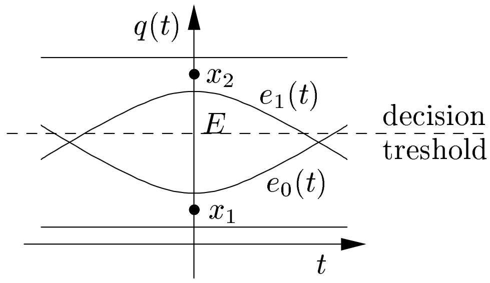


$$\boxed{P_{s1} = P_1 \left(1 - (1 - Q(\tfrac{a_1 - E_1}{\sigma}) - Q(\tfrac{E_3 - a_1}{\sigma}))(1 - Q(\tfrac{a_2 - E_2}{\sigma}) - Q(\tfrac{E_4 - a_2}{\sigma}))\right)}$$



$$\boxed{P_s = \sum_{i=1}^{4} P_i \left(2Q(\tfrac{a_i}{\sigma\sqrt{2}}) - Q^2(\tfrac{a_i}{\sigma\sqrt{2}})\right)}$$

11.5.3 Mean Symbol Error Probability With ISI

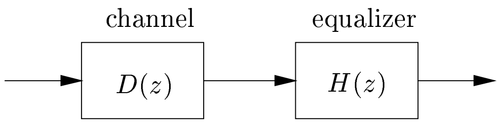


$$\boxed{P_s = P_1 Q(\tfrac{E - e_0(0)}{\sigma}) + P_2 Q(\tfrac{e_1(0) - E}{\sigma})}$$

11.5.4 Signal Power

- signal power: $\boxed{N = \sum_{n=1}^{k} P_n \cdot |a_n|^2}$
- maximum distortion: $\boxed{A_{max} = \sum_{n=-\infty,\, n \neq l}^{\infty} |a_n|}$

11.6 Discrete Time Equalizer



Definition:
$D(z)$ is of *minimal phase*,
if for all zeros z_i of $D(z)$: $\boxed{|z_i| < 1}$

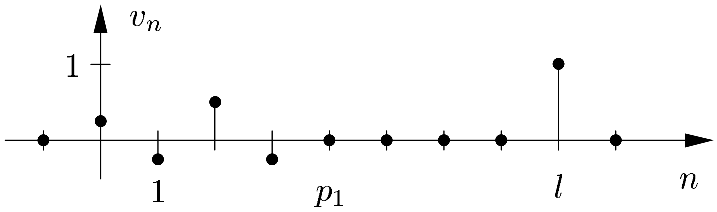
Problem: find $H(z)$, such that $V(z) = D(z)H(z) \overset{!}{\approx} z^{-l}$ $\quad (l \geq 0)$
Solution:
- find all zeros z_i of $D(z)$ $\quad (D(z_i) = 0\ )$
- write $D(z)$ as $\boxed{D(z) = d_0 D'(z) D''(z)}$ with
  $D'(z)$ polynomial, all p_1 zeros in $|z| > 1$ and $D''(z)$ polynomial, all p_2 zeros in $|z| < 1$, $d_0 = const.$
- set $\boxed{H(z) = \frac{B(z)}{D''(z)}}$ whereby $\boxed{B(z) = \sum_{n=0}^{N} b_n z^{-n}}$ is an approximation for $\frac{z^{-l}}{d_0 D'(z)}$ $\quad \boxed{l = N + p_1}$

$B(z)$ can be found by the following methods

11.6.1 Zero Forcing

$$\boxed{V(z) = \sum_{n=0}^{l} v_n z^{-n} = d_0 D'(z) B(z) = d_0(1 + d'_1 z^{-1} + \ldots + d'_{p_1} z^{-p_1})(b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_N z^{-N}) \overset{!}{\approx} z^{-l}}$$

- calculate the coefficients v_n
- $N+1$ degrees of freedom $\rightsquigarrow$ $N+1$ coefficients can be forced to arbitrary values, e.g. $v_{p_1} \overset{!}{=} 0, \ldots v_{l-1} \overset{!}{=} 0$ and $v_l \overset{!}{=} 1$



- $\rightsquigarrow$ calculate $b_0 \ldots b_N$

11.6.2 Series Expansion

- write ideal $B(z)$ as $\boxed{B_i(z) = \frac{z^{-l}}{d_0 D'(z)} = c_0 z^{-N} \frac{1}{1-q(z)}}$ $\quad (c_0 = const.)$
- use geometric series : $\boxed{\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n}$ $(|x| < 1)$ $\rightsquigarrow$ $\boxed{B_i(z) = c_0 z^{-N} \sum_{n=0}^{\infty} (q(z))^n}$
- <u>alternatively:</u> use power series $\boxed{\frac{1}{z-z_1} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k}$ with $\boxed{b_k = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k}{\partial z^k} \frac{1}{z-z_1}|_{z=0} = \frac{-1}{z_1^{k+1}}}$
- approximate $B_i(z)$ with $\boxed{B(z) = c_0 z^{-N} \sum_{n=0}^{N} (q(z))^n}$

11.6.3 Polynomial Division

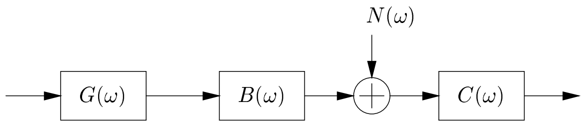
- write ideal $B(z)$ as $\boxed{B_i(z) = z^{p_1 - l} \frac{1}{d_0 D'(z) z^{p_1}}}$
- calculate the first N terms of $\frac{1}{d_0 D'(z) z^{p_1}}$ with polynomial division: $\boxed{1 : (d_0 D'(z) z^{p_1}) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_N z^N + \ldots}$
- approximate $B_i(z)$ with $\boxed{B(z) = z^{p_1 - l}(c_0 + c_1 z + \ldots + c_N z^N) = c_N + c_{N-1} z^{-1} + \ldots + c_0^{-N}}$

11.6.4 Minimum Squared Error

- calculate w_n $\circ\!\!\overset{z}{-}\!\!\bullet$ $W(z) = D(z)H(z) = d_0 D'(z) B(z)$
- calculate $f = \sum_{n=0}^{l-1} |w_n|^2$
- solve system of $N+1$ equations: $\boxed{w_l = 1}$ $\boxed{\frac{\partial f}{\partial b_i} = 0 \qquad \forall i \in \{0, 1, \ldots, N\}}$

11.7 Optimum Decision Strategies

11.7.1 Matched Filter



$f(t)$ $\circ\!\!-\!\!\bullet$ $F(\omega) = G(\omega)B(\omega)$ $\rightsquigarrow$

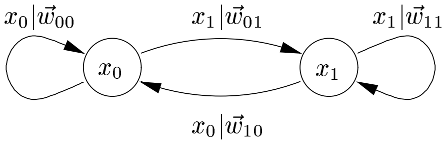
$\boxed{c(t) = K f(t_o - t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad C(\omega) = K \bar{F}(\omega) e^{-j\omega t_0}}$

$(K, t_0 > 0)$

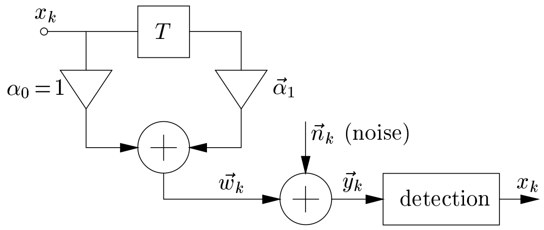
11.8 Maximum Likelyhood Detection Of Sequences

11.8.1 Channel Model

state transition diagram :
(example for 2 states)
input signal : $x_k \in \{x_0, x_1\}$
output signal : $\vec{w}_k \in \{\vec{w}_{00}, \vec{w}_{01}, \vec{w}_{10}, \vec{w}_{11}\}$



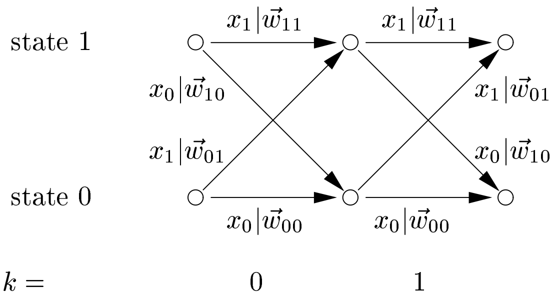
discrete time model :



example:

$$w_{00} = \alpha_1 x_0 + \alpha_0 x_0$$
$$w_{01} = \alpha_1 x_0 + \alpha_0 x_1$$
$$w_{10} = \alpha_1 x_1 + \alpha_0 x_0$$
$$w_{11} = \alpha_1 x_1 + \alpha_0 x_1$$

11.8.2 Trellis Diagramm

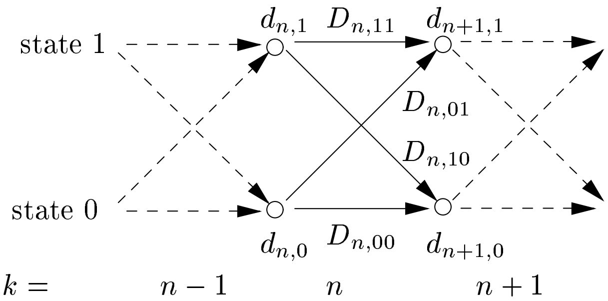


2 possibilities for branch metric:

a) distance metric

$\boxed{D_{k,ij} = (\vec{y}_k - \vec{w}_{ij})^2}$

$\rightsquigarrow$ find path with **minimal** $\sum\limits_{k=1}^{K} (\vec{y}_k - \vec{w}_{ij})^2$

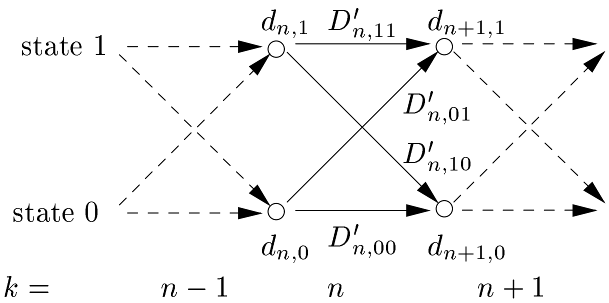


- set $d_{K,1} = d_{K,0} = 0$
- start with $k = K - 1$
- calculate $\boxed{d_{k,0} = \min(d_{k+1,0} + D_{k,00}, d_{k+1,1} + D_{k,01})}$
  use path with minimal $d_{k+1,i} + D_{k,0i}$
- calculate $\boxed{d_{k,1} = \min(d_{k+1,1} + D_{k,11}, d_{k+1,0} + D_{k,10})}$
  use path with minimal $d_{k+1,i} + D_{k,0i}$
- continue with $k = K-2, K-3, \ldots$
- find symbol sequence x_k according to
  used path and state transition diagram

b) correlation metric

$\boxed{D'_{k,ij} = \vec{y}_k \vec{w}_{ij}}$

$\rightsquigarrow$ find path with **maximal** $\sum\limits_{k=1}^{K} \vec{y}_k \vec{w}_{ij}$



- set $d_{K,1} = d_{K,0} = 0$
- start with $k = K - 1$
- calculate $\boxed{d_{k,0} = \max(d_{k+1,0} + D'_{k,00}, d_{k+1,1} + D'_{k,01})}$
  use path with maximal $d_{k+1,i} + D'_{k,0i}$
- calculate $\boxed{d_{k,1} = \max(d_{k+1,1} + D'_{k,11}, d_{k+1,0} + D'_{k,10})}$
  use path with maximal $d_{k+1,i} + D'_{k,0i}$
- continue with $k = K-2, K-3, \ldots$
- find symbol sequence x_k according to
  used path and state transition diagram

11.9 Code Division Multiplex

2 codes f_n and g_n are orthogonal, if $\boxed{\sum\limits_{n=0}^{N_c-1} f_n g_n = 0}$

2 codes f_n and g_n are orthonormal, if $\boxed{\sum\limits_{n=0}^{N_c-1} f_n g_n = 1}$

$N_c \ldots$ length of codes f_n and g_n

12 technische Informatik

12.1 Boolsche Algebra

$\boxed{a \cdot a = a}$ $\boxed{a \cdot 1 = a}$ $\boxed{a \cdot 0 = 0}$ $\boxed{a \cdot \overline{a} = 0}$

$\boxed{a + a = a}$ $\boxed{a + 0 = a}$ $\boxed{a + 1 = 1}$ $\boxed{a + \overline{a} = 1}$

$\boxed{a(b+c) = ab + ac}$ $\boxed{a + ab = a}$ $\boxed{a(\overline{a}+b) = ab}$ $\boxed{(a+b)(\overline{a}+b) = b}$ $\boxed{\overline{abc\ldots} = \overline{a} + \overline{b} + \overline{c} + \ldots}$

$\boxed{a + bc = (a+b)(a+c)}$ $\boxed{a(a+b) = a}$ $\boxed{a + (\overline{a}b) = a + b}$ $\boxed{ab + (\overline{a}b) = b}$ $\boxed{\overline{a + b + c + \ldots} = \overline{a}\overline{b}\overline{c}\ldots}$

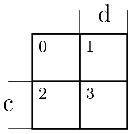
$\boxed{\overline{(\overline{a})} = 0}$

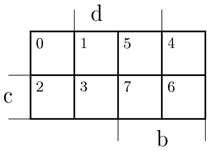
$\boxed{(a+b)(\overline{a}+c) = (a+b)(\overline{a}+c)(b+c) = ac + \overline{a}b + bc = ac + \overline{a}b}$

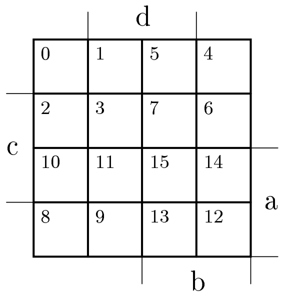
12.2 KV-Diagramme

Wahrheitstabelle

Nr.	a	b	c	d	F
0	0	0	0	0	
1	0	0	0	1	
2	0	0	1	0	
3	0	0	1	1	
4	0	1	0	0	
5	0	1	0	1	
6	0	1	1	0	
7	0	1	1	1	
8	1	0	0	0	
9	1	0	0	1	
10	1	0	1	0	
11	1	0	1	1	
12	1	1	0	0	
13	1	1	0	1	
14	1	1	1	0	
15	1	1	1	1	







12.3 Zahlendarstellung

12.3.1 Darstellung ganzer Zahlen

Dez (m.V.)	Dez (o.V.)	Hex	Bin (8 Bit)
0	0	00	0000 0000
1	1	01	0000 0001
2	2	02	0000 0010
3	3	03	0000 0011
4	4	04	0000 0100
5	5	05	0000 0101
6	6	06	0000 0110
7	7	07	0000 0111
8	8	08	0000 1000
9	9	09	0000 1001
10	10	0A	0000 1010
11	11	0B	0000 1011
12	12	0C	0000 1100
13	13	0D	0000 1101
14	14	0E	0000 1110
15	15	0F	0000 1111
16	16	10	0001 0000
17	17	11	0001 0001
18	18	12	0001 0010
19	19	13	0001 0011
20	20	14	0001 0100
⋮	⋮	⋮	⋮
126	126	7E	0111 1110
127	127	7F	0111 1111
-128	128	80	1000 0000
-127	129	81	1000 0001
⋮	⋮	⋮	⋮
-3	253	FD	1111 1101
-2	254	FE	1111 1110
-1	255	FF	1111 1111

Dez (m.V.)	Dez (o.V.)	Hex	Bin (16 Bit)
0	0	0000	0000 0000 0000 0000
1	1	0001	0000 0000 0000 0001
2	2	0002	0000 0000 0000 0010
3	3	0003	0000 0000 0000 0011
4	4	0004	0000 0000 0000 0100
5	5	0005	0000 0000 0000 0101
6	6	0006	0000 0000 0000 0110
7	7	0007	0000 0000 0000 0111
8	8	0008	0000 0000 0000 1000
9	9	0009	0000 0000 0000 1001
10	10	000A	0000 0000 0000 1010
11	11	000B	0000 0000 0000 1011
12	12	000C	0000 0000 0000 1100
13	13	000D	0000 0000 0000 1101
14	14	000E	0000 0000 0000 1110
15	15	000F	0000 0000 0000 1111
16	16	0010	0000 0000 0001 0000
17	17	0011	0000 0000 0001 0001
18	18	0012	0000 0000 0001 0010
19	19	0013	0000 0000 0001 0011
20	20	0014	0000 0000 0001 0100
⋮	⋮	⋮	⋮
32766	32766	7FFE	0111 1111 1111 1110
32767	32767	7FFF	0111 1111 1111 1111
-32768	32768	8000	1000 0000 0000 0000
-32767	32769	8001	1000 0000 0000 0001
⋮	⋮	⋮	⋮
-3	65533	FFFD	1111 1111 1111 1101
-2	65534	FFFE	1111 1111 1111 1110
-1	65535	FFFF	1111 1111 1111 1111

12.3.2 Komplementbildung ganzer Zahlen

- (z-1)-Komplementbildung: stellenweise invertieren Beispiel für Basis z=2: $\begin{array}{r} X_2 = 100101 \\ \Rightarrow K_1 = 011010 \end{array}$

- z-Komplementbildung: stellenweise invertieren +1 Beispiel für Basis z=2: $\begin{array}{r} X_2 = 100101 \\ \Rightarrow K_2 = 011011 \end{array}$

12.3.3 Überlauf

Überlauf bei der Addition bzw. Subtraktion (durch Addition des Zweierkomplements) von 2 binären ganzen Zahlen tritt auf, wenn $\boxed{c_n \oplus c_{n-1} = 1}$.

Beispiel:
$$\begin{array}{ccccccc} & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ + & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline & \mathbf{1} & {\scriptscriptstyle 1} & {\scriptscriptstyle 1} & & & \\ \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \qquad 1 \oplus 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{kein Überlauf}$$

12.3.4 Fließkommazahlendarstellung

$$\boxed{x = \underbrace{(-1)^v}_{\text{Vorzeichen}} \; \underbrace{(1+f)}_{\text{Mantisse}} \, 2^{e-B}}$$

v	e	f
1	k	m

$x \ldots$ rationale Zahl
$f \ldots$ Fraction $\in [0,1[$
$e \ldots$ Exponent, ganzzahlig
$B \ldots$ Bias, ganzzahlig, konstant, meist $B = 2^{k-1} - 1$
$m \ldots$ Stellen für Fraction f
$k \ldots$ Stellen für Exponent e
$v \ldots$ Vorzeichenbit
($v = 0 \rightarrow$ positiv, $v = 1 \rightarrow$ negativ)

Beispiel:
$x = 13,75 \qquad m = 8 \qquad k = 4$
x positiv $\Rightarrow v = 0 \qquad B = 2^3 - 1 = 7$
$x = 13,75\frac{8}{8} = 1,71875 \cdot 8 = (1 + 0,71875) \cdot 2^3$
durch Vergleich: $f = 0,71875 \qquad B - e = 3 \quad \Leftrightarrow \quad e = 10$
$f = 0,71875 = 1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} + 1 \cdot 2^{-4} + 1 \cdot 2^{-5} + 0 \cdot 2^{-6} + 0 \cdot 2^{-7} + 0 \cdot 2^{-8}$
$\Rightarrow x : \boxed{0}\ \boxed{1010}\ \boxed{10111000}$

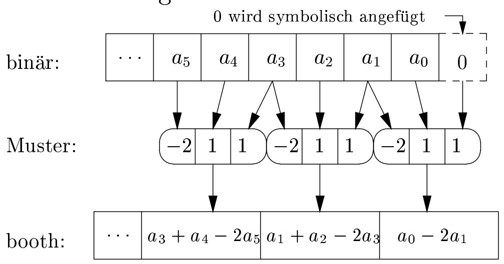
12.3.5 Booth-Code

zur Codierung von vorzeichenbehafteten Ganzzahlen in Zweierkomplementdarstellung (Anwendung z.B. bei Multiplikation)

- Koeffizenten: $\boxed{-2}\boxed{-1}\boxed{0}\boxed{1}\boxed{2}$
- Stellenwerte:

$\cdots$	$4^4 = 256$	$4^3 = 64$	$4^2 = 16$	$4^1 = 4$	$4^0 = 1$

- Umrechnung Binär $\leftrightarrow$ Booth :



Beispiel:
$-91_{(dez)}$
$= 1110100101_{(bin)}$
$= 0 \quad -1 \quad -2 \quad 1 \quad 1_{(booth)}$
$= -64 - 2 \cdot 16 + 4 + 1_{(dez)} = -91_{(dez)}$

12.4 Codesicherung

$\bar{e} = h - 1$
$$e = \begin{cases} \frac{h-2}{2} & h \text{ gerade} \\ \frac{h-1}{2} & h \text{ ungerade} \end{cases}$$

$h \ldots$ Minimalabstand
$\bar{e} \ldots$ Anzahl sicher erkennbarer Fehler
$e \ldots$ Anzahl sicher korrigierbarer Fehler

12.4.1 Paritätsprüfung

eine Kontrollstelle: $k = 1$ ein Fehler sicher erkennbar: $\bar{e} = 1$ Minimalabstand: $h = 2$

$$\boxed{y_{m+1} = \begin{cases} \sum_{i=1}^{m} x_i \ldots \bmod 2 & \text{even parity check} \\ 1 \oplus \sum_{i=1}^{m} x_i \ldots \bmod 2 & \text{odd parity check} \end{cases}}$$

Beispiel:

x_1	x_2	x_3	y_4	
1	1	0	0	(even parity)
1	1	0	1	(odd parity)

12.4.2 Hamming-Prüfschema

Bedingung:

$$\boxed{m + k \leq 2^k - 1}$$

m	k
1	2
2 ... 4	3
5 ... 11	4
12 ... 26	5
27 ... 57	6
58 ... 120	7
121 ... 247	8
248 ... 502	9
503 ... 1013	10

Eigenschaften:

- $e = 1$ sicher korrigierbare Fehler
- $\bar{e} = 2$ sicher erkennbare Fehler
- $h = \bar{e} + 1 = 3$ Minimalabstand
- $2^k - 1$ Fehlersyndrome
- $m + k$ Fehlermuster

m ... Nachrichtenstellen
k ... Kontrollstellen

Beispiel:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	x_{17}	x_{18}	x_{19}	x_{20}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	x_{26}	y_{27}	y_{28}	y_{29}	y_{30}	y_{31}
1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0
1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1

Spalten paarweise linear unabhängig ! ($x_1 \ldots x_{26}$) — Einheitsmatrix ($y_{27} \ldots y_{31}$)

z.B.: 5. Prüfzeile: $y_{31} = x_{12} \oplus x_{13} \oplus \ldots \oplus x_{26}$
Prüfspalte entspricht dem jeweiligen Fehlersyndrom.

12.4.3 zyklisches Prüfschema

Bedingungen und Eigenschaften: siehe Hamming-Prüfschema
Berechnung der Prüfstellen mit Hilfe eines Generatorpolynoms:

$$\boxed{R(u) = \text{Rest}\left\{\frac{N(u)u^k}{G(u)} \ldots \bmod 2\right\}} \qquad \text{(Rest der Polynomdivision)}$$

(Generatorpolynome siehe Tabelle 1 auf S. 37)

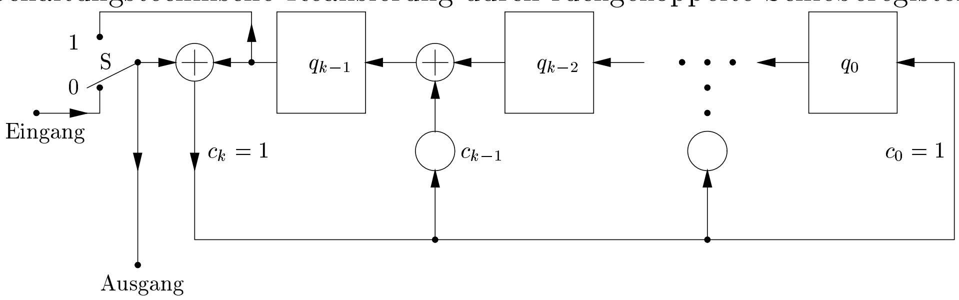
Beispiel:

$m = 4$	Nachrichtenstellen	1110	$N(u) = u^3 + u^2 + u$
$k = 3$	Generatorstellen	1011	$G(u) = u^3 + u + 1$

Polynomdivision :

1 1 1 0 0 0 0 : 1 0 1 1 = 1 1 0 0
1 0 1 1
  1 0 1 0
  1 0 1 1
    0 0 1 0
    0 0 0 0
      0 1 0 0
      0 0 0 0
        1 0 0   Codewort: 1 1 1 0 **1 0 0**

Schaltungstechnische Realisierung durch rückgekoppelte Schieberegister:



- Initialisierung: alle Speicher auf „0“ setzen
- Kontrollstellen erzeugen:
  - in m Takten mit Schalterstellung $S = 0$ werden die Nachrichten seriell ausgegeben und die k Kontrollstellen im Schieberegister erzeugt

k	Koeffizenten der Generatorpolynome											
2										1	1	1
3									1	0	1	1
4								1	0	0	1	1
5							1	0	0	1	0	1
							1	1	1	1	0	1
							1	1	0	1	1	1
6						1	0	0	0	0	1	1
						1	1	0	0	1	1	1
7					1	0	0	0	1	0	0	1
					1	0	0	0	1	1	1	1
					1	0	0	1	1	1	0	1
					1	1	1	1	0	1	1	1
8				1	0	0	0	1	1	1	0	1
9			1	0	0	0	0	1	0	0	0	1
10		1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
11	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1

Tabelle 1: Auswahl irreduzibler primitiver Polynome

  - in weiteren k Takten mit Schalterstellung $S = 1$ werden die Kontrollstellen seriell ausgegeben und die Speicher wieder auf „0“ gesetzt

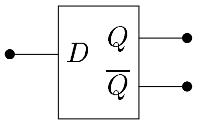
- Kontrollstellen prüfen:
  - in $m + k$ Takten mit Schalterstellung $S = 0$ werden die Nachrichten- und Kontrollstellen eigelesen
  - im Schieberegister steht dann das Nullwort bzw. das Fehlersyndrom

12.4.4 Haming-Code mitParitätsprüfung

Wird ein Hamming-codiertes Nachrichtenwort noch zusätzlich mit einer Paritätsprüfung (über alle Nachrichten- und Kontrollstellen) versehen, so erhöht sich h auf $h = 4$ und $\bar{e}$ auf $\bar{e} = 3$.

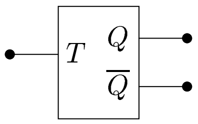
12.5 Speicherelemente

12.5.1 D-Flipflop



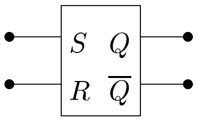
Charakteristische Gleichung: $\boxed{Q^{t+1} = D^t}$

12.5.2 T-Flipflop



Charakteristische Gleichung: $\boxed{Q^{t+1} = (\overline{T}Q + T\overline{Q})^t}$

12.5.3 R-S-Flipflop

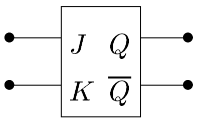


Charakteristische Gleichung: $\boxed{Q^{t+1} = (S + \overline{R}Q)^t}$

Lösung der Anwendungsgleichung $Q^{t+1} = (g_1 Q + g_2 \overline{Q})^t$: $\boxed{S = g_2\overline{Q}^t}$ $\boxed{R = \overline{g_1}Q^t}$

gilt die Bedingung $\overline{g}_1 g_2 = 0$, dann : $\boxed{S = g_2}$ $\boxed{R = \overline{g_1}}$

12.5.4 J-K-Flipflop



Charakteristische Gleichung: $\boxed{Q^{t+1} = (\overline{K}Q + J\overline{Q})^t}$

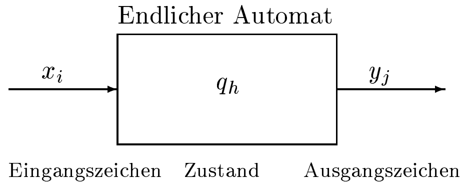
Lösung der Anwendungsgleichung $Q^{t+1} = (g_1 Q + g_2 \overline{Q})^t$: $\boxed{J = g_2}$ $\boxed{K = \overline{g_1}}$

12.6 endliche Automaten

12.6.1 Definition

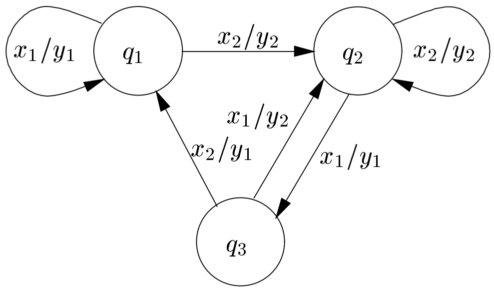
Mathematisches Modell für eine Vorrichtung mit einer endlichen Anzahl interner Zustände, die eine Folge von Eingangszeichen einliest, verarbeitet und dabei eine Folge von Ausgangszeichen erzeugt.

Eingangsmenge $M_x = \{x_1, x_2, \cdots x_{xmax}\}$
Eingangszeichen $x_i \in M_x$
Zustandsmenge $M_q = \{q_1, q_2, \cdots q_{qmax}\}$
Zustand $q_h \in M_q$
Ausgangsmenge $M_y = \{y_1, y_2, \cdots y_{ymax}\}$
Ausgangszeichen $y_j \in M_y$
Übergangsfunktion $\mathrm{f} : M_x \times M_q \mapsto M_q$
Ausgangsfunktion (Mealy-Automat) $\mathrm{g} : M_x \times M_q \mapsto M_y$
Ausgangsfunktion (Moore-Automat) $\mathrm{g} : M_q \mapsto M_y$



12.6.2 Mealy-Automat

Beispiel:



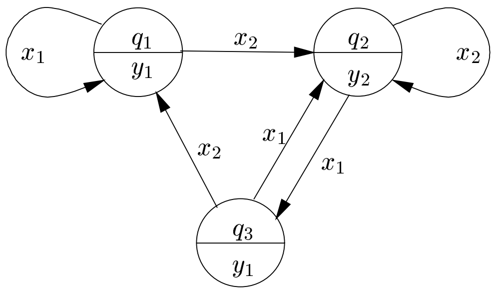
$M_x = \{x_1, x_2\}$
$M_q = \{q_1, q_2, q_3\}$
$M_y = \{y_1, y_2\}$
$Q^{(n+1)} = \mathrm{f}\,(Q^{(n)}, X)$
$Y = \mathrm{g}\,(Q^{(n)}, X)$

Zustandsübergangstabelle:

$Q^{(n)}$	$Q_{x_1}^{(n+1)}$	$Q_{x_2}^{(n+1)}$	Y_{x_1}	Y_{x_2}
q_1	q_1	q_2	y_1	y_2
q_2	q_3	q_2	y_1	y_2
q_3	q_2	q_1	y_2	y_1

12.6.3 Moore-Automat

Beispiel:



$M_x = \{x_1, x_2\}$
$M_q = \{q_1, q_2, q_3\}$
$M_y = \{y_1, y_2\}$
$Q^{(n+1)} = \mathrm{f}\,(Q^{(n)}, X)$
$Y = \mathrm{g}\,(Q^{(n)})$

Zustandsübergangstabelle:

$Q^{(n)}$	$Q_{x_1}^{(n+1)}$	$Q_{x_2}^{(n+1)}$	Y
q_1	q_1	q_2	y_1
q_2	q_3	q_2	y_2
q_3	q_2	q_1	y_1

12.6.4 Medwedew-Automat

Der Medwedew-Automat ist ein Spezialfall des Moore-Automaten, bei dem das Ausgangszeichen gleich dem Zustand ist: $Y = Q$

12.6.5 Äquivalenz von Automaten

Zwei Automanten sind *äquivalent*, wenn sie auf beliebige und beliebig lange Folgen von Eingangszeichen identische Folgen von Ausgangszeichen liefern.

12.6.6 Äquivalenz von Zuständen

- Zwei Zustände q_i, q_j sind *k-äquivalent*, wenn ein Automat sowohl mit dem Ausganszustand q_i als auch mit dem Ausganszustand q_j für eine beliebige Eingangsfolge der Länge k identische Ausgangsfolgen erzeugt.
- Zwei Zustände q_i, q_j sind *äquivalent*, wenn ein Automat sowohl mit dem Ausganszustand q_i als auch mit dem Ausganszustand q_j für beliebige Eingangsfolgen beliebiger Länge identische Ausgangsfolgen erzeugt.
- äquivalente Zustände können zusammengefasst werden.

12.7 Zustandsreduzierung

Durch das Zusammenfassen aller jeweils äquivalenten Zuständen eines Automaten kann man den minimalen Automaten finden.

Vorgehensweise:

1. Zerlegung des Zustandsvektors in Teilvektoren, die alle jeweils 1-äquivalenten Zustände enthalten.

2. Bestimmung der Folgezustände aller Zustände der Teilvektoren. Liegen nicht alle Folgezustände eines Teilvektors (für jedes gegebene Eingangszeichen x) wieder innerhalb eines Teilvektors, dann den Teilvektor erneut aufteilen, so dass alle Folgezustände dieser neuen Teilvektoren (für jedes gegebene x) innerhalb der ursprünglichen Teilvektoren liegen. Aus Teilvektoren mit n-äquivalenten Zuständen werden somit Teilvektoren mit $(n+1)$-äquivalenten Zuständen.

3. Schritt 2. solange wiederholen, bis keine weitere Aufteilung mehr notwendig ist. Jeweils alle Zustände eines Teilvektoren sind nun äquivalent und können zu einem Zustand zusammengefasst werden.

Beispiel:

$\underline{Q}^n$	$\underline{Q}^{n+1}$		$\underline{Y}^n$	
	X_1	X_2	X_1	X_2
1	2	6	0	0
2	1	3	0	0
3	5	6	0	1
4	2	4	0	0
5	3	5	1	1
6	2	6	0	0

1. Zerlegung: $Z_1 = (\underline{Q}_1, \underline{Q}_2, \underline{Q}_3) = (\overline{1\,2\,4\,6}, \overline{3}, \overline{5})$

Folgezustände der 1. Zerlegung:

$\underline{Q}_i^n$	$\underline{Q}_i^{n+1}$	
	X_1	X_2
$\underline{Q}_1 = \overline{1\,2\,4\,6}$	$2\,1\,2\,2$	$6\,3\,4\,6$
$\underline{Q}_2 = \overline{3}$	5	6
$\underline{Q}_3 = \overline{5}$	3	5

2. Zerlegung: $Z_2 = (\underline{Q}_2, \underline{Q}_3, \underline{Q}_4, \underline{Q}_5) = (\overline{3}, \overline{5}, \overline{2}, \overline{1\,4\,6})$

Folgezustände der 2. Zerlegung:

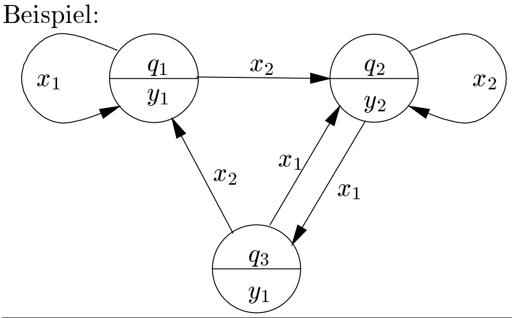
$\underline{Q}_i^n$	$\underline{Q}_i^{n+1}$	
	X_1	X_2
$\underline{Q}_2 = \overline{3}$	5	6
$\underline{Q}_3 = \overline{5}$	3	5
$\underline{Q}_4 = \overline{2}$	1	3
$\underline{Q}_5 = \overline{1\,4\,6}$	$2\,2\,2$	$6\,4\,6$

3. Zerlegung $Z_3 = (\underline{Q}_2, \underline{Q}_3, \underline{Q}_4, \underline{Q}_5) = (\overline{3}, \overline{5}, \overline{2}, \overline{1\,4\,6})$

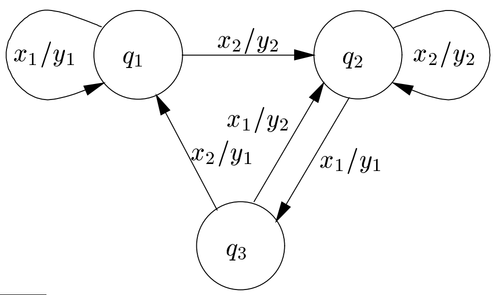
Es ist keine weitere Zerlegung erforderlich, die Teilvektoren der 3. Zerlegung sind die Endklassen. Die Zustände 1,4 und 6 sind äquivalent und können zu einem Zustand zusammengefasst werden.

12.7.1 Umwandlung Moore — Mealy

Immer möglich, da der Moore-Automat ein Spezialfall des Mealy-Automaten ist.
Beispiel:



$\Leftrightarrow$

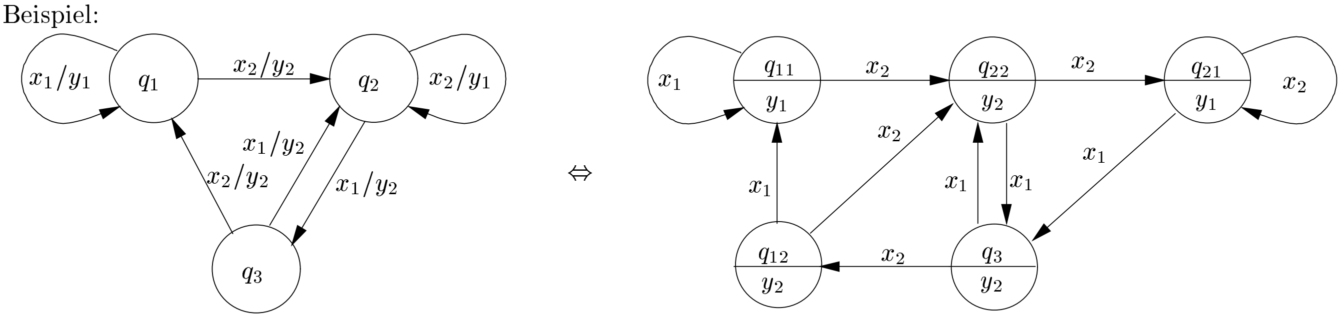


Eingangsfolge	?	x_1	x_2	x_2	x_1	x_1	x_1	x_2
Zustandsfolge	q_1	q_1	q_2	q_2	q_3	q_2	q_3	q_1
Ausgangsfolge	y_1,?	y_1	y_2	y_2	y_1	y_2	y_1	y_1

12.7.2 Umwandlung Mealy — Moore

Wenn verschiedene Übergänge in einen Zustand verschiedene Ausgangszeichen erzeugen, dann muss dieser Zustand aufgespaltet werden.

Beispiel:

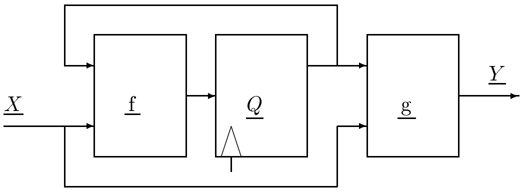


Eingangsfolge	?	x_2	x_1	x_1	x_2	x_2	x_2	x_1
Zustandsfolge	q_3	q_1, q_{12}	q_1, q_{11}	q_1, q_{11}	q_2, q_{22}	q_2, q_{21}	q_2, q_{21}	q_3
Ausgangsfolge	?,y_2	y_2	y_1	y_1	y_2	y_1	y_1	y_2

12.7.3 Relisierung von Automaten

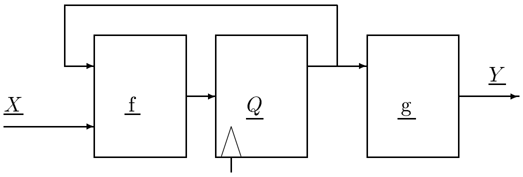
- Binäre Kodierung von Zeichen $\underline{X}, \underline{Y}$ und Zuständen $\underline{Q}$
- Zustandsspeicherung wird realisiert durch Speicherelemente
- Übergangs- und Ausgangsfunktion f , g werden durch kombinatorische Netzwerke realisiert

Mealy-Automat:



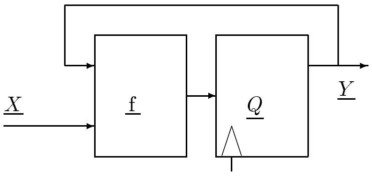
- asynchrone Ausgangssignale möglich
- kombinatorische Spikes am Ausgang
- Gefahr geschlossener Timing-Pfade (→Oszillation, ...)
- schnelle Reaktion auf sich ändernde Eingangssignale

Moore-Automat:



- synchrone Ausgangssignale (bis auf Verzögerungen im kombinat. Netzwerk)
- kombinatorische Spikes am Ausgang
- keine geschlossene Timing-Pfade möglich

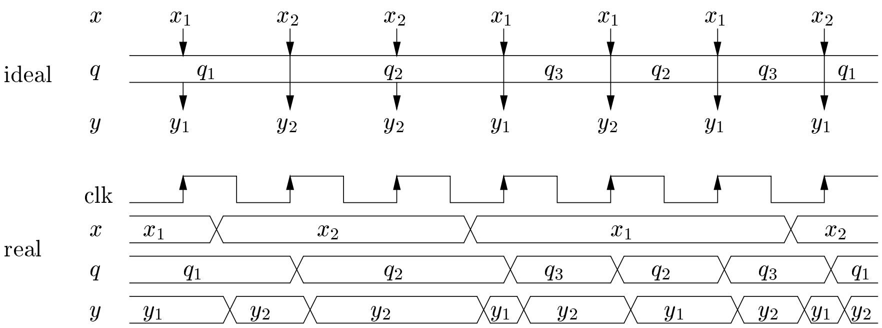
Medwedew-Automat:



- synchrone Ausgangssignale
- schnelle Reaktion der Ausgänge auf die Flanke des Systemtakts
- keine kombinatorischen Spikes am Ausgang
- evtl. größerer Zustandsvektor notwendig

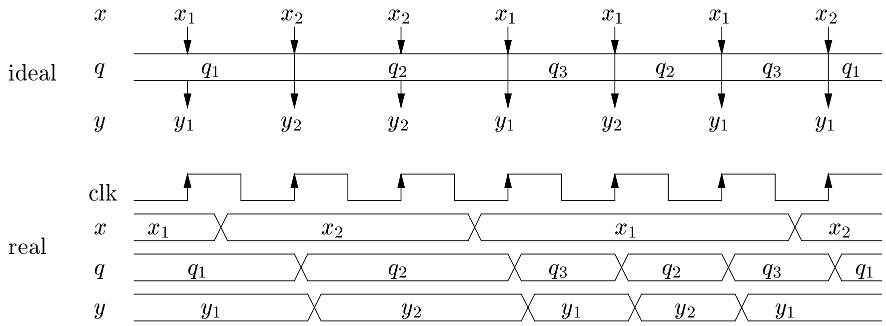
12.7.4 Zeitverhalten eines Mealy-Automaten

Beispiel: Mealy-Automat aus Kapitel 12.7.1



12.7.5 Zeitverhalten eines Moore-Automaten

Beispiel: Moore-Automat aus Kapitel 12.7.1



12.8 Informationstheorie

Informationsgehalt einer Quelle: $\boxed{H(X) = \sum_i P_i \,\mathrm{ld}\, \frac{1}{P_i}}$

max. Informationsgehalt einer Quelle: $\boxed{H_0 = \mathrm{ld}\, n}$

Quelle hat max. Informationsgehalt $\boxed{H(X) = H_0 \Leftrightarrow P_i = \frac{1}{n} \quad \forall n}$

mittlere Codewort-Länge: $\boxed{\bar{m} = \sum_i P_i m_i}$

Redundanz: $\boxed{R = H_0 - H(X) = \mathrm{ld}\, n - H(X)}$

Code-Redundanz: $\boxed{R_c = \bar{m} - H(X) = \sum_{i=1}^{N} P(x_i)\left(m_i - \mathrm{ld}\, \frac{1}{P(x_i)}\right)}$

$n \ldots$ Anzahl der Zeichen

$P_i \ldots$ Auftrittswahrscheinlichkeit des Zeichens x_i

$m_i \ldots$ Länge des i-ten Zeichens

12.9 Das ISO/OSI-Basisreferenzmodell

	Schicht	Aufgabe	Dienste
1	Physical	ungesicherte Systemverbindung	- Aktivierung/Deaktivierung eines Übertragungsabschnittes - Bitserielle Übertragung von Schicht-1 Blöcken - Festlegung aller elektrischen, mechanischen, funktionellen und prozeduralen Eigenschften
2	Data Link	gesicherte Systemverbindung	- Auf-/Abbau von DL-Verbindungen - Übertragung von Schicht-2-Blöcken - Reihenfolge- und Datenflusssteuerung - Fehlererkennung und -behebung
3	Network	Endsystem-verbindung	- Auf-/Abbau von N-Verbindungen - Verkehrsklenkung und Vermittlung von Schicht-3-Blöcken/Kanälen - Festlegung eines einheitlichen Adress- bzw. Nummerierungsschemas
4	Transport	Teilnehmer-verbindung	- Auf-/Abbau von T-Verbindungen über das Netz hinweg - Multiplexen von T-Verbindungen auf N-Verbindungen - Austausch von Schicht-4-Nachrichtenblöcken - Adresstransformation - Ausgleich unterschiedlicher Netzeigenschaften durch Wahl eines Transportprotokolls - Reihenfolgesicherung, Datenflusssteuerung, Kettung, Segmentierung, Fehlerbehandlung von Nachrichtenblöcken
5	Session	Kommunikations-verbindung	- Auf-/Abbau von S-Verbindungen - Steuerung des Informationsaustausches - Vestlegung des Übertragungsmodus - Sychronisation des Dialogs
6	Presentation	gemeinsames Sprachmittel	- Auf/-Abbau von P-Verbindungen - Transformation von Daten hinsichtlich Code, Format und Syntax - Verschlüsselung von Daten
7	Application	Informations-austausch	- Auf-/Abbau von A-Verbindungen - Anwenderprozesse der Benutzer, des System- und des Anwendungsmanagments

13 Statistik

13.1 Kombinatorik

- Permutationen einer n-elementigen Menge: $\boxed{n!}$
- Permutationen einer n-elementigen Menge mit jeweils k_i identischen Elementen : $\boxed{\frac{n!}{\prod_i k_i}}$
- Ziehen von k Elementen aus einer n-elementigen Menge:

Stichproben	mit Berücksichtigung der Reihenfolge	ohne Berücksichtigung der Reihenfolge
mit Zurücklegen	n^k	$\binom{n+k+1}{k} = \frac{(n+k+1)!}{(n+1)!k!}$
ohne Zurücklegen	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$

13.2 Wahrscheinlichkeit

$\boxed{\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(B)\,\mathrm{P}(A|B)}$ $\boxed{\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)}$ $\boxed{\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(A^c) = 1}$

$\boxed{\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B)\,\mathrm{P}(A|B) + \mathrm{P}(B^c)\,\mathrm{P}(A|B^c)}$ $\boxed{\mathrm{P}(B|A) = \mathrm{P}(A|B)\frac{\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{\mathrm{P}(A|B)\,\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(B)\,\mathrm{P}(A|B)+\mathrm{P}(B^c)\,\mathrm{P}(A|B^c)}}$

- A und B sind **stochastisch unabhängig**, wenn

$\boxed{\mathrm{P}(A|B) = \mathrm{P}(A) \;\wedge\; \mathrm{P}(B|A) = \mathrm{P}(B)} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B)}$

13.3 Zufallsvariablen

13.3.1 diskrete Zufallsvariablen

- Zufallsvariable $X \in \mathbb{N}_0$
- Verteilung: $\boxed{p_i = \mathrm{P}(X = i)}$ $\quad i \in \mathbb{N}_0$
- Verteilungsdichtefunktion: $\boxed{\mathrm{f}(x) = \mathrm{F}'(x) = \sum_{i=0}^{\lfloor x \rfloor} p_i \delta(x-i)}$ $\quad x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor$... größte ganze Zahl $\leq x$
- Verteilungsfunktion: $\boxed{\mathrm{F}(x) = \mathrm{P}(X \leq x) = \sum_{i=0}^{\lfloor x \rfloor} p_i}$ $\quad$ F monoton wachsend, $\mathrm{F}(\infty) = 1$
- Erzeugende Funktion: $\boxed{G(z) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i z^i \;\bullet\!\!\overset{Z}{-}\!\!\circ\; p_i = \frac{1}{i!}\frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}z^i} G(z)|_{z=0}}$ $\boxed{G(z) = \phi(\ln \frac{1}{z})}$ $\boxed{G(1) = 1}$

13.3.2 kontinuierliche Zufallsvariablen

- Zufallsvariable $X \in \mathbb{R}$
- Verteilungsdichtefunktion: $\boxed{\mathrm{f}(x) = \mathrm{F}'(x)}$ $\quad x \in \mathbb{R}$
- Verteilungsfunktion: $\boxed{\mathrm{F}(x) = \mathrm{P}(X \leq x) = \int_{0^-}^{x} \mathrm{f}(\xi)\,\mathrm{d}\xi}$ $\quad$ F monoton wachsend, $\mathrm{F}(0^-) = 0,\ \mathrm{F}(\infty) = 1$
- Erzeugende Funktion (Laplace-Stieltjes-Transformierte) :

$\boxed{\phi(s) = \int_{0^-}^{\infty} \mathrm{f}(x) e^{-sx}\,\mathrm{d}x \;\bullet\!\!\overset{L}{-}\!\!\circ\; \mathrm{f}(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \phi(s) e^{isx}\,\mathrm{d}s}$ $\quad \mathrm{Re}(s) \geq 0$ $\quad \boxed{\mathrm{F}(x) \;\circ\!\!\overset{L}{-}\!\!\bullet\; \frac{\phi(s)}{s}}$ $\quad \boxed{\phi(s) = G(e^{-s})}$

13.3.3 Erwartungwert

- diskrete Zufallsvariable: $\boxed{\mathrm{E}(X^k) = \sum_{i=0}^{\infty} i^k p_i}$

$\boxed{\mathrm{E}(X) = G'(1)}$ $\boxed{\mathrm{E}(X^2) = G''(1) + G'(1)}$ $\boxed{\mathrm{E}(X^3) = G'''(1) + 3G''(1) + G'(1)}$

- kontinuierliche Zufallsvariable: $\boxed{\mathrm{E}(X^k) = \int_{0^-}^{\infty} x^k \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = (-1)^k \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}s^k}\phi(s)|_{s=0}}$
- Linarität: $\boxed{\mathrm{E}(aX + bY) = a\,\mathrm{E}(X) + b\,\mathrm{E}(Y)}$

13.3.4 Varianz

- allgemein: $\boxed{\mathrm{VAR}(X) = \mathrm{E}(|X - \mathrm{E}(X)|^2) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}^2(X)}$ $\boxed{\mathrm{VAR}(aX+b) = a^2\,\mathrm{VAR}(X)}$
- diskrete Zufallsvariable: $\boxed{\mathrm{VAR}(X) = G''(1) + G'(1) - (G'(1))^2}$

13.3.5 Kovarianz

$\boxed{\mathrm{cov}(X,Y) = \mathrm{E}((X - \mathrm{E}(X))(Y - \mathrm{E}(Y))) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)}$ $\boxed{\mathrm{cov}(X, aX+b) = a\,\mathrm{VAR}(X)}$

- Variationskoeffizent: $\boxed{\mathrm{c}(X) = \frac{\sqrt{\mathrm{VAR}(X)}}{\mathrm{E}(X)}}$
- Korellationskoeffizent: $\boxed{\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{VAR}(X)\,\mathrm{VAR}(Y)}}}$ $\boxed{\rho(X, aX+b) = \begin{cases} 1 & ,a > 1 \\ -1 & ,a < 1 \end{cases}}$

13.4 Summe von zwei Zufallsvariablen

Seien X_1, X_2 2 Zufallsvariablen mit gemeinsamer Verteilungsdichtefunktion $\mathrm{f}(x_1, x_2)$, dann gilt für die Zufallsvariable $X_s = X_1 + X_2$:

- Verteilungsdichtefunktion: $\boxed{\mathrm{f}_s(z) = \int\limits_{u=0}^{z} \mathrm{f}(u, z-u)\,\mathrm{d}u}$
- Verteilungsfunktion: $\boxed{\mathrm{F}_s(z) = \int\limits_{u=0}^{z} \int\limits_{v=0}^{z} \mathrm{f}(u, v-u)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u}$
- Erwartungswert: $\boxed{\mathrm{E}(X_s) = \mathrm{E}(X_1) + \mathrm{E}(X_2)}$
- Varianz: $\boxed{\mathrm{VAR}(X_s) = \mathrm{VAR}(X_1) + \mathrm{VAR}(X_2) + 2\,\mathrm{cov}(X_1, X_2)}$

Sind X_1, X_2 statistisch unabhängig, dann gilt :

- $\boxed{\mathrm{f}(x_1, x_2) = \mathrm{f}_1(x_1)\,\mathrm{f}_2(x_2)}$ $\boxed{\mathrm{f}_s(x) = \mathrm{f}_1(x) * \mathrm{f}_2(x) \quad \circ\!\!\xrightarrow{L}\!\!\bullet \quad \phi_s(s) = \phi_1(s)\phi_2(s)}$ $\boxed{G(z) = G_1(z) \cdot G_2(z)}$
- Varianz: $\boxed{\mathrm{VAR}(X_s) = \mathrm{VAR}(X_1) + \mathrm{VAR}(X_2)}$ $\boxed{\mathrm{cov}(X_1, X_2) = 0}$

13.5 diskrete Verteilungen

13.5.1 Binominal-Verteilung

Wahrscheinlichkeit, bei n Versuchen mit jeweiliger Erfolgswahrscheinlichkeit p genau i Erfolge zu erhalten.

- $B(n,p)$ - Verteilung: $\boxed{\mathrm{P}(X = i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}}$
- Erwartungswert: $\boxed{\mathrm{E}(X) = np}$
- Varianz: $\boxed{\mathrm{VAR}(X) = np(1-p)}$
- für $n \to \infty$ geht die diskrete Binominal-Verteilung über in die kontinuierliche Normalverteilung

13.5.2 Poisson-Verteilung

- $\pi(\lambda)$ - Verteilung: $\boxed{\mathrm{P}(X = i) = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}}$
- Erwartungswert: $\boxed{\mathrm{E}(X) = \lambda}$
- $\boxed{\mathrm{E}(X^2) = \lambda + \lambda^2}$
- Varianz: $\boxed{\mathrm{VAR}(X) = \lambda}$

13.5.3 geometrische Verteilung

Wahrscheinlichkeit, beim $i+1$-ten Versuch erstmalig das Ereignis mit jeweiliger Erfolgswahrscheinlichkeit p zu erhalten.

- geom (p) - Verteilung: $\boxed{\mathrm{P}(X = i) = (1-p)^i p}$
- Erwartungswert: $\boxed{\mathrm{E}(X) = \frac{1-p}{p}}$
- Varianz: $\boxed{\mathrm{VAR}(X) = \frac{1-p}{p^2}}$
- Erzeugende Funktion: $\boxed{G(z) = \frac{p}{1-(1-p)z}}$

13.5.4 Bernoulli-Verteilung

- $B(p)$ - Verteilung: $\boxed{\mathrm{P}(X = i) = \begin{cases} 1-p & ,i = 0 \\ p & ,i = 1 \\ 0 & ,\text{sonst} \end{cases}}$
- Erwartungswert: $\boxed{\mathrm{E}(X) = p}$
- Varianz: $\boxed{\mathrm{VAR}(X) = p(1-p)}$
- Erzeugende Funktion: $\boxed{G(z) = (1-q) + qz}$

13.6 kontinuierliche Verteilungen

13.6.1 negativ-exponentielle Verteilung

- $Exp(\lambda)$ - Verteilungsdichtefunktion: $\boxed{\mathrm{f}(x) = \lambda e^{-\lambda x}}$
- $Exp(\lambda)$ - Verteilungsfunktion: $\boxed{\mathrm{F}(x) = 1 - e^{-\lambda x}}$
- Erwartungswert: $\boxed{\mathrm{E}(X) = \frac{1}{\lambda}}$ $\boxed{\mathrm{E}(X^2) = \frac{2}{\lambda^2}}$ • Varianz: $\boxed{\mathrm{VAR}(X) = \frac{1}{\lambda^2}}$
- Laplace-Stieltjes-Transformierte: $\boxed{\phi(s) = \frac{\lambda}{s+\lambda}}$

13.6.2 Rechteck-Verteilung

- $R(a,b)$ - Verteilungsdichtefunktion: $\boxed{\mathrm{f}(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & ,a \le x \le b \\ 0 & ,\text{sonst} \end{cases}}$
- $R(a,b)$ - Verteilungsfunktion: $\boxed{\mathrm{F}(x) = \begin{cases} 0 & ,x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & ,a \le x \le b \\ 1 & ,x > b \end{cases}}$
- Erwartungswert: $\boxed{\mathrm{E}(X) = \frac{a+b}{2}}$ • Varianz: $\boxed{\mathrm{VAR}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}}$
- Laplace-Stieltjes-Transformierte: $\boxed{\phi(s) = \frac{e^{-as} - e^{-bs}}{(b-a)s}}$

13.6.3 Normal-Verteilung

- $N(\mu, \sigma^2)$ - Verteilungsdichtefunktion: $\boxed{\mathrm{f}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(x-\mu)^2}{-2\sigma^2}}}$
- Erwartungswert: $\boxed{\mathrm{E}(X) = \mu}$ • Varianz: $\boxed{\mathrm{VAR}(X) = \sigma^2}$

14 Teletraffic Theory

14.1 Birth-Death Processes

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, shift left, "\lambda_0"] & 1 \arrow[l, shift left, "\mu_1"] \arrow[r, shift left, "\lambda_1"] & 2 \arrow[l, shift left, "\mu_2"] \arrow[r, shift left, "\lambda_2"] & \cdots \arrow[l, shift left, "\mu_3"] \arrow[r, shift left, "\lambda_{N-2}"] & N{-}1 \arrow[l, shift left, "\mu_{N-1}"] \arrow[r, shift left, "\lambda_{N-1}"] & N \arrow[l, shift left, "\mu_N"]
\end{tikzcd}
$$

$\lambda_x \ldots$ birth rate in state x
$\mu_x \ldots$ death rate in state x

- in case of stationary state: $\boxed{p_x = p_0 \frac{\prod_{i=0}^{x-1} \lambda_i}{\prod_{i=1}^{x} \mu_i}}$ $(x = 1, 2, \ldots, N)$ $\boxed{p_0 = \left(1 + \sum_{x=1}^{N} \frac{\prod_{i=0}^{x-1} \lambda_i}{\prod_{i=1}^{x} \mu_i}\right)^{-1}}$
- examples:
  - $\lambda_x = \lambda$, $\mu_x = \mu$, $N \to \infty$: $\boxed{p_x = (1-\rho)\rho^x}$ $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$
  - $\lambda_x = \lambda$, $\mu_x = x\mu$, $N \to \infty$: $\boxed{p_x = e^{-\rho} \frac{\rho^x}{x!}}$ $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$

14.2 Queueing Systems

14.2.1 Infinite Source Delay System M/M/1

infinite sources, Markovian arrival process $P(T_A \le t) = 1 - e^{-\lambda t}$, arrival rate λ
1 server, Markovian service time $P(T_H \le t) = 1 - e^{-\epsilon t}$, average service time $h = \frac{1}{\epsilon}$, infinite queue capacity

- probabilities of state $\boxed{p_x = (1-A)A^x}$ • carried traffic $\boxed{Y = A = \rho = \lambda h}$
- probability of delay $\boxed{W = \lambda h}$ • waiting time of all requests $\boxed{w = \frac{hA}{1-A}}$ • mean queue length $\boxed{\Omega = \frac{A^2}{1-A}}$

14.2.2 Infinite Source Delay System M/M/n

infinite sources, Markovian arrival process $P(T_A \le t) = 1 - e^{-\lambda t}$, arrival rate λ
n servers, Markovian service time $P(T_H \le t) = 1 - e^{-\epsilon t}$, average service time $h = \frac{1}{\epsilon}$, infinite queue capacity

- probabilities of state $\boxed{p_x = \begin{cases} p_0 \frac{A^x}{x!} & x = 0,1,\ldots,n-1 \\ p_0 \frac{A^n}{n!} \left(\frac{A}{n}\right)^{x-n} & x = n, n+1, \ldots \end{cases}}$ $\boxed{p_0 = \left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{A^i}{i!} + \frac{A^n n}{n!(n-A)}\right)^{-1}}$
- convergence condition $\boxed{\frac{A}{n} \overset{!}{<} 1}$ • probability of delay $\boxed{W = p_n \frac{n}{n-A}}$
- occupancy $\boxed{\rho = \frac{A}{n}}$ • mean queue length $\boxed{\Omega = p_n \frac{\rho}{(1-\rho)^2}}$ • carried traffic $\boxed{Y = A}$
- waiting time of all requests $\boxed{w_1 = \frac{\Omega}{\lambda} = W t_W = W \frac{h}{n-A}}$ • waiting time of waiting requests $\boxed{t_W = \frac{\Omega}{\lambda W} = \frac{h}{n-A}}$

14.2.3 Infinite Source Delay System M/G/1

infinite sources, Markovian arrival process $P(T_A \le t) = 1 - e^{-\lambda t}$, arrival rate λ
1 server, average service time $h = \frac{1}{\epsilon}$, infinite queue capacity

- waiting time of all requests $\boxed{w = \frac{\lambda \operatorname{E}(T_H^2)}{2(1-\rho)} = \frac{h\rho(1+c_H^2)}{2(1-\rho)}}$ (Pollaczek-Khintchine-Formula)

14.2.4 Infinite Source Delay-Loss System M/M/n

infinite sources, Markovian arrival process $P(T_A \le t) = 1 - e^{-\lambda t}$, arrival rate λ
n servers, Markovian service time $P(T_H \le t) = 1 - e^{-\epsilon t}$, average service time $h = \frac{1}{\epsilon}$, finite queue with s waiting places

- probability of state $\boxed{p_x = \begin{cases} p_0 \frac{A^x}{x!} & x = 0,1,\ldots,n-1 \\ p_0 \frac{A^n}{n!} \rho^{x-n} & x = n, n+1, \ldots, n+s \end{cases}}$ $\boxed{p_0 = \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{A^i}{i!} + \frac{A^n \rho(1-\rho^s)}{n!(1-\rho)}\right)^{-1}}$ $\boxed{A = \frac{\lambda}{\epsilon}}$ $\boxed{\rho = \frac{A}{n}}$
- probability of loss $\boxed{B = p_{n+s} = p_n \rho^s}$ • probability of delay $\boxed{W = p_n \frac{1-\rho^s}{1-\rho}}$
- mean queue Length $\boxed{\Omega = p_n \rho \left[\frac{1-\rho^s}{(1-\rho)^2} - \frac{s\rho^s}{1-\rho}\right]}$ • carried traffic $\boxed{Y = A(1-B)}$
- waiting time of all requests $\boxed{w_1 = \frac{\Omega}{\lambda}}$ • waiting time of waiting requests $\boxed{t_W = \frac{\Omega}{\lambda W}}$

14.2.5 Infinite Source Loss System M/M/n

infinite sources, Markovian arrival process $P(T_A \le t) = 1 - e^{-\lambda t}$, arrival rate λ
n servers, Markovian service time $P(T_H \le t) = 1 - e^{-\epsilon t}$, average service time $h = \frac{1}{\epsilon}$, no queue

- probability of state $\boxed{p_x = \frac{\frac{A^x}{x!}}{\sum_{i=0}^{n} \frac{A^i}{i!}}}$ $x = 0, 1, \ldots, n$ • offered traffic $\boxed{A = \lambda h = \frac{\lambda}{\epsilon}}$
- probability of loss $\boxed{B = p_n}$ • carried traffic $\boxed{Y = A(1-B)}$ • lost traffic $\boxed{A - Y = AB}$

14.2.6 Infinite Source Loss System M/G/1

infinite sources, Markovian arrival process $P(T_A \le t) = 1 - e^{-\lambda t}$, arrival rate λ
1 server, average service time $h = \frac{1}{\epsilon}$, no queue

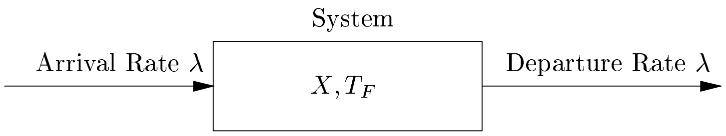
- probabilities of state $\boxed{p_x = \begin{cases} p_0 \frac{A^x}{x!} & x = 0,1,\ldots,n-1 \\ p_0 \frac{A^n}{n!} \left(\frac{A}{n}\right)^{x-n} & x = n, n+1, \ldots \end{cases}}$ $\boxed{p_0 = \left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{A^i}{i!} + \frac{A^n n}{n!(n-A)}\right)^{-1}}$

14.2.7 Finite Source Loss System M/M/n

q sources, Markovian arrival process $P(T_I \le t) = 1 - e^{-\alpha t}$, idle source arrival rate α
n servers, Markovian service time $P(T_H \le t) = 1 - e^{-\epsilon t}$, average service time $h = \frac{1}{\epsilon}$, no queue

- probability of state $\boxed{p_x = p_0 \binom{q}{x} a^x}$ $\boxed{p_0 = \left(\sum_{i=0}^{n} \binom{q}{i} a^i\right)^{-1}}$ $\boxed{a = \frac{\alpha}{\epsilon}}$
- carried traffic $\boxed{Y = \sum_{i=0}^{n} i p_i}$ • offered traffic $\boxed{A = \lambda h = (q - Y)a}$
- time congestion probability $\boxed{E = p_n = p_0 \binom{q}{n} a^n}$ • probability of loss $\boxed{B = \pi_n = \frac{q-n}{q-Y} p_n = \frac{\binom{q-1}{n} a^n}{\sum_{i=0}^{n} \binom{q-1}{i} a^i}}$

14.2.8 Little's Theorem



$\boxed{\mathrm{E}(X) = \lambda \, \mathrm{E}(T_F)}$

15 Networks and Processes

15.1 Preliminaries

"iff" = "if and only if"

15.1.1 Sets

- cardinality of set S : $\boxed{|S| = \{\text{number of elements in } S\}}$
- power set of set S : $\boxed{2^S = \{S' | S' \subseteq S\}}$ $\boxed{|2^S| = 2^{|S|}}$

15.1.2 Relations

A binary relation R on a set S ist called:

- *reflexive* if $\boxed{(x,x) \in R \;\; \forall x \in S}$
- *symmetric* if $\boxed{(x,y) \in R \quad \Rightarrow \quad (y,x) \in R}$
- *transitive* if $\boxed{(x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \quad \Rightarrow \quad (x,z) \in R}$
- *irreflexive* if $\boxed{(x,x) \notin R \;\; \forall x \in S}$
- *antisymmetric* if $\boxed{(x,y) \in R \quad \Rightarrow \quad (y,x) \notin R}$
- *total* if $\boxed{(x,y) \in R \vee (y,x) \in R \;\; \forall x,y \in S}$

15.1.3 Graphs

- an undirected graph is *connected*, if there is a path between each pair of vertices
- an directed graph is *connected*, if its undirected version is connected
- an directed graph is *strongly connected*, if there is a directed path between each pair of vertices

15.2 Petri Nets

15.2.1 Formal Description of P/T-Nets

place-transition Petri Net: $\boxed{N = (P, T, F, K, W, M_0)}$

P ... finite set (places) $\quad$ T ... finite set (transitions)

$F \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$ (flow relation) $\quad$ $K : P \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ (capacity)

$W : F \to \mathbb{N}$ (weight) $\quad$ $M_0 : P \to \mathbb{N}_0$ with $\forall p \in P : M_0(p) \leq K(p)$ (inital marking)

$\boxed{{}^\bullet x = \{y | (y,x) \in F\}}$ $\forall x \in P \cup T$ $\quad$ $\boxed{x^\bullet = \{y | (x,y) \in F\}}$ $\forall x \in P \cup T$

$$\boxed{\tilde{W}((x,y)) = \begin{cases} W((x,y)) & \text{, if } (x,y) \in F \\ 0 & \text{, else} \end{cases}}$$

- firing sequence $\boxed{\sigma = \vec{t}_{k_1} \vec{t}_{k_2} \cdots \vec{t}_{k_j}}$ $1 \leq k_i \leq m \;\; \forall i$

15.2.2 Vector Notation of P/T-Nets

$\boxed{P = \{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \cdots \vec{p}_n\}}$ $\boxed{T = \{\vec{t}_1, \vec{t}_2, \cdots \vec{t}_m\}}$

$$\boxed{\vec{p}_i = \begin{pmatrix} \delta_{1,i} \\ \delta_{2,i} \\ \vdots \\ \delta_{n,i} \end{pmatrix}} \boxed{\vec{t}_i = \begin{pmatrix} \delta_{1,i} \\ \delta_{2,i} \\ \vdots \\ \delta_{m,i} \end{pmatrix}} \quad \text{mit } \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{, if } i = j \\ 0 & \text{, else} \end{cases} \quad \boxed{\vec{M} = \begin{pmatrix} M(p_1) \\ M(p_2) \\ \vdots \\ M(p_n) \end{pmatrix}} \boxed{\vec{K} = \begin{pmatrix} K(p_1) \\ K(p_2) \\ \vdots \\ K(p_n) \end{pmatrix}}$$

- input matrix $I \in \mathbb{N}^{n \times m}$ with $\boxed{I_{i,j} = \begin{cases} W((p_i, t_j)) & \text{, if } (p_i, t_j) \in F \\ 0 & \text{, else} \end{cases}}$
- output matrix $O \in \mathbb{N}^{m \times n}$ with $\boxed{O_{i,j} = \begin{cases} W((t_i, p_j)) & \text{, if } (t_i, p_j) \in F \\ 0 & \text{, else} \end{cases}}$
- incidence matrix $\boxed{C = O^T - I = (\Delta\vec{t}_1, \Delta\vec{t}_2, \ldots \Delta\vec{t}_m) \in \mathbb{Z}^{n \times m}}$

$$C = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} t_1 & t_2 & \cdots & t_m \end{array} \\ \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{array}$$

$\boxed{\vec{\Delta} t_i = C\vec{t_i}}$ $\boxed{\vec{\#\sigma} = \sum_{\vec{t_i}\ in\ \sigma} \vec{t_i} = \begin{pmatrix} \text{number of } t_1 \text{ in } \sigma \\ \text{number of } t_2 \text{ in } \sigma \\ \vdots \\ \text{number of } t_m \text{ in } \sigma \end{pmatrix}}$

15.2.3 Firing

- A transition t ist *enabled* $\boxed{M[t\rangle}$ in marking M, if
  $\boxed{M(p) \geq W((p,t))\ \ \forall p \in {}^\bullet t}$ and $\boxed{W((p,t)) + M(p) \leq K(p)\ \ \forall p \in t^\bullet}$ $\Leftrightarrow$
  $\boxed{I\vec{t} \leq_c \vec{M}}$ and $\boxed{\vec{M} + \vec{\Delta} t \leq_c \vec{K}}$ ($\leq_c \ldots$ componentwise smaller or equal)
- t can *fire*, if t is enabled.
- Effect of firing t in marking M: $\boxed{M[t\rangle M'}$ $\Rightarrow$ $\boxed{M'(p) = M(p) + \tilde{W}((t,p)) - \tilde{W}((p,t))}$ $\forall p \in P$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{\vec{M'} = \vec{M} + \vec{\Delta} t}$
- Effect of firing sequence σ in marking $\vec{M}$: $\boxed{\vec{M}[\sigma\rangle \vec{M'}}$ $\Rightarrow$
  $\boxed{\vec{M'} = \vec{M} + C\vec{\#\sigma}}$

15.2.4 Reachability

- *reachability set* reach(M) of making M smalles set, such that:
  - $\boxed{M \in \text{reach}(M)}$ and
  - $\boxed{M' \in \text{reach}(M) \text{ and } M'[t\rangle M'' \quad \Rightarrow \quad M'' \in \text{reach}(M)}$
- $\boxed{\text{reach}(N) = \text{reach}(M_0)}$
- a place $p \in P$ is *k-save* if $\boxed{M(p) \leq k}$ $\forall M \in \text{reach}(M)$
- a net is *k-save* if all places are k-save
- a net N is *bounded* if $\boxed{\exists k \in \mathbb{N}}$ such that N is k-save

15.2.5 Liveness

- a transition t ist *live in marking* M if t can fire in some $M'' \in \text{reach}(M')$ for each $M' \in \text{reach}(M)$
- a transition t is *live*, if t is live in M_0
- a net N is *live*, if all its transitions are live
- a transition t is *dead in* M if $\forall M' \in \text{reach}(M)$ t can not fire
- a transition t is *dead*, if t is dead in M_0
- a net N is *dead*, if all its transitions are dead
- a net N is *weakly live (without deadlocks)*, if $\forall M \in \text{reach}(N)\ \exists t \in T : M[t\rangle$

15.2.6 Fairness

Let $\sigma = M_1[t_1\rangle M_2[t_2\rangle \ldots$ be a firing sequence

- σ is *weakly fair* for $t \in T$, if $\boxed{(\exists k \in \mathbb{N}\ \forall j \geq k : M_j[t\rangle) \quad \Rightarrow \quad \forall k \in \mathbb{N}\ \exists j \geq k : t = t_j}$
  (if a transition is enabled after a certain point of time at every point of time, it finally has to fire)
- σ is *strongly fair* for $t \in T$, if $\boxed{(\forall k \in \mathbb{N}\ \exists j \geq k : M_j[t\rangle) \quad \Rightarrow \quad \forall k \in \mathbb{N}\ \exists j \geq k : t = t_j}$
  (if a transition is enabled at infinite many points of time, it finally has to fire)
- a net N is *weakly fair* (*strongly fair*), if each possible firing sequence is weakly fair (strongly fair)
- strong fairness implies weak fairness
- each net with finite reach(N) without cycles is strongly fair
- a P/T-net is called *contact-free*, if $\forall M \in \text{reach}(N)$
  $\boxed{\forall t \in T : (\forall t \in {}^\bullet t : W((p,t)) \leq M(p)) \quad \Rightarrow \quad (\forall p' \in t^\bullet : W((t,p')) + M(p') \leq K(p'))}$
  (capacities have no influence on transmitions being enabled)

15.2.7 P-Invariants

Let incidence matrix $C \in \mathbf{Z}^{n \times m}$

- $y \in \mathbf{Z}^n$ is called *P-invariant* of N, if $\boxed{\vec{y}^T C = 0}$
  $\Rightarrow \quad \forall M \in \text{reach}(N) : yM = yM_0$
- a P-invariant y is called *propper* if every component of y is ≥ 0 and at least one component is > 0

- a place p is *covered by P-invariant y* if $y(p) > 0$ and y is propper
- a P/T-net is called *covered by P-invariants* iff every place is covered by a P-invariant
- *support* of y : $\boxed{\operatorname{supp}(y) = \{i \mid y(i) > 0\}}$
- a propper P-invariant y is called *support-minimal*, if there is no propper P-invariant y' with $\operatorname{supp}(y') \subsetneq \operatorname{supp}(y)$
- if a place p is *covered by a P-invariant* then p is bounded
- a P/T-net is *covered by a P-invariant* iff there is a P-invariant y with each component > 0
- if a P/T-net N is *covered by P-invariants* then N is bounded

15.2.8 T-Invariants

Let incidence matrix $C \in \mathbb{Z}^{n \times m}$
- $t \in \mathbb{Z}^m$ is called *T-invariant* of N, if $\boxed{C\vec{t} = 0}$
  - $\Rightarrow$ if sequence σ can be fired from M and $\#\sigma$ is a T-invariant, then $\boxed{M[t\rangle M}$
- a set $R \in \mathbb{N}_0^n$ is called *home-space* of N, if $R \neq \emptyset$ and $\boxed{\forall M \in \operatorname{reach}(N)\ \exists \tilde{M} \in R : \tilde{M} \in \operatorname{reach}(M)}$
- a state M is called *home-state* of N, if $\{M\}$ is home-space (trivial home-spaces are $\mathbb{N}_0^n$ and $\operatorname{reach}(M)$)
- t is live $\quad\Leftrightarrow\quad \{M \mid M[t\rangle \ \wedge\ M \in \operatorname{reach}(M)\}$ is home space
- M is a *home-state* and $M[t\rangle$, then t is live

15.2.9 Farkas Algorithm

Farkas Algorithm can be used to determin all minimal P-invariants of a P/T-Net.
- input: incidence matrix $C \in \mathbb{Z}^{n,m}$

set $D := (C|E_n)$ $\qquad E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

`for` $i = 0$ to m `do`
{
  `for` each pair d_1, d_2 of rows of D with $d_1(i) \cdot d_2(i) < 0$ (different sign in i-th component) `do`
  {
    set $d := |d_2(i)| \cdot d_1 + |d_1(i)| \cdot d_2 \qquad (\rightsquigarrow d(i) = 0)$
    set $d' = \frac{d}{\gcd(d(1), \cdots d(m+n))}$ $\qquad$ (gcd ... greatest common divisor)
    extend D by taking d' as last row
  }
  omit from D all rows with i-th component $\neq 0$
}
omit from D the first m columns (they contain only zeros)

$\rightarrow$ The resulting matrix contains (among others) the minimal reduced P-invariants

15.3 Formal Languages

- Σ is a finite alphabet
- $\Sigma^* := \{a_1, \ldots a_k | k \in \mathbb{N}. a_i \in \Sigma\}$ is a set of finite words over Σ
- $|w| := k$ is the length of the word $w = a_1, \ldots a_k$
- ϵ is the empty word ($|\epsilon| = 0$)
- a formal language L is a subset of Σ^*
- $\Sigma^\omega := \{\sigma | \sigma = a_1 a_2 \ldots, a_i \in \Sigma\}$ is a set of infinite words over Σ

15.3.1 Finite Automata

deterministic finite automata:

$\boxed{A = \{Q, \Sigma, \delta, q_0, F\}}$ where
- Q is a finite set of states
- Σ is a finite alphabet
- $\delta : Q \times \Sigma \mapsto Q$ is the transition function
- $q_0 \in Q$ is the initial state
- $F \subseteq Q$ is the set of final states
- $\delta(q, \epsilon) := q \quad (\epsilon-\text{transition})$
- $\delta(q, wa) := \delta(\delta(q, w), a) \quad (a \in \Sigma, w \in \Sigma^*)$
- $L(A) := \{w \in \Sigma^* | \delta(q_0, w) \in F\}$ accepted language

nondeterministic finite automata:

$\boxed{A = \{Q, \Sigma, \delta, q_0, F\}}$ where
- Q, Σ, q_0, F are as for deterministic finite automata
- $\delta : Q \times \Sigma \mapsto 2^Q$ is the transition function
- $\delta(q, \epsilon) := \{q\} \quad (\epsilon-\text{transition})$
- $\delta(q, wa) := \bigcup\limits_{q' \in \delta(q,w)} \delta(q', a) \quad (a \in \Sigma, w \in \Sigma^*)$
- $L(A) := \{w \in \Sigma^* | \delta(q_0, w) \cap F \neq \emptyset\}$ accepted language

- A language is accepted by a nondeterministic finite automaton, iff it is accepted by an deterministic finite automaton.
- The **class of regular languages** is the set of languages that can be accepted by a (non-/deterministic) finite automaton.
- **Pumping Lemma:** Let $L \subseteq \Sigma^*$ be a regular language. Then there exists a constant $n_L \in \mathbb{N}$ such that for every $z \in L$ with $|z| \geq n_L$, z can be written as $\boxed{z = uvw}$ where the following holds:
  $\boxed{|uv| \leq n_L}$ $\boxed{|v| \geq 1}$ $\boxed{\forall i \in \mathbb{N}_0 : uv^iw \in L}$
- **Nerode equivalence:** Let $L \subseteq \Sigma^*$ be a language. The relation $\sim_L$ over Σ^* is defined as
  $\boxed{u \sim_L v \quad \Leftrightarrow \quad \forall z \in \Sigma^* : (uz \in L \quad \Leftrightarrow \quad vz \in L)}$
- **Regular Expressions:** The set of languages defined by regular expressions is equal to the class of regular expressions
  $\boxed{\{L \subseteq \Sigma^* | \exists \alpha \in \text{RegExp} : L(\alpha) = L\} = \text{REG}}$
  If $L_1, L_2 \in$ REG then $\boxed{\overline{L_1} \in \text{REG}}$ $\boxed{L_1 \cup L_2 \in \text{REG}}$ $\boxed{L_1 \cap L_2 \in \text{REG}}$
- The set of RegExp of regular expressions is the smalles set satisfying the following conditions:
  - $\emptyset, \epsilon, a \in \text{RegExp} \quad (a \in \Sigma)$
  - If $\alpha, \beta \in$ RegExp then also $(\alpha) \cdot (\beta) \in$ RegExp, $(\alpha) + (\beta) \in$ RegExp, $(\alpha)^* \in$ RegExp
  - If $\alpha, \beta \in$ RegExp then $\boxed{L(\alpha \cdot \beta) := L(\alpha) \cdot L(\beta)}$, $\boxed{L(\alpha + \beta) := L(\alpha) \cup L(\beta)}$, $\boxed{L(\alpha^*) := L(\alpha)^*}$
  - $\boxed{L_1 \cdot L_2 := \{uv \in \Sigma^* | u \in L_1 \ \wedge \ v \in L_2\}}$ $\boxed{\emptyset \cdot L_2 = \emptyset}$ $\boxed{L^* := \{w_1 w_2 \dots w_k | k \geq 0, w_i \in L\}}$

15.3.2 Büchi-Automata

deterministic Büchi-automata:

$\boxed{A = \{Q, \Sigma, \delta, I, F\}}$ where
- Q is a finite set of states
- Σ is a finite alphabet
- $\delta : Q \times \Sigma \mapsto Q$ is the transition function
- $I \subseteq Q$ is the set of initial states
- $F \subseteq Q$ is the set of final states
- $\delta(q, \epsilon) := q \quad (\epsilon-$transition)
- $\delta(q, wa) := \delta(\delta(q, w), a) \quad (a \in \Sigma, w \in \Sigma^\omega)$
- $L(A) := \{a_0, a_1, \ldots \in \Sigma^\omega | q_0 \in I, \exists^\infty i : q_i \in F, q_{i+1} = \delta(q_i, a_i) \ \forall i \in \mathbb{N}_0\}$ accepted language

nondeterministic Büchi-automata:

$\boxed{A = \{Q, \Sigma, \delta, I, F\}}$ where
- Q, Σ, I, F are as for deterministic Büchi automata
- $\delta : Q \times \Sigma \mapsto 2^Q$ is the transition function
- $\delta(q, \epsilon) := q \quad (\epsilon-$transition)
- $\delta(q, wa) := \bigcup_{q' \in \delta(q,w)} \delta(q', a) \quad (a \in \Sigma, w \in \Sigma^\omega)$
- $L(A) := \{a_0, a_1, \ldots \in \Sigma^\omega | q_0 \in I, \exists^\infty i : q_i \in F, q_{i+1} \in \delta(q_i, a_i) \ \forall i \in \mathbb{N}_0\}$ accepted language

- A language $L \subseteq \Sigma^\omega$ is called *ω-regular*, if there is some Büchi-automaton A with $L(A) = L$.
- An ω-regular $L \subseteq \Sigma^\omega$ is called *deterministic*, if $L(A) = L$ for some deterministic Büchi-automaton.

15.4 Computation Tree Logic (CTL)

$p \in P$ is a state formula

Operators:

Let φ, ψ be path formulas and σ an infinite sequence of states, then

$\boxed{\sigma \models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \sigma(0) \models \varphi}$

X φ ("next φ") is a state formula:

$\boxed{\sigma \models \mathrm{X}\,\varphi \quad \Leftrightarrow \quad \sigma(1), \sigma(2), \ldots \quad \models \varphi}$

E φ ("exists a path with φ") is a state formula:

$\boxed{s \models \mathrm{E}\,\varphi \quad \Leftrightarrow \quad \exists \text{ a path } \sigma = s_0, s_1, \ldots \text{ with } s = s_0 \ \wedge \ \sigma \models \varphi}$

A φ ("for all paths φ") is a state formula:

$\boxed{s \models \mathrm{A}\,\varphi \quad \Leftrightarrow \quad \forall \text{ paths } \sigma = s_0, s_1, \ldots \text{ with } s = s_0 \ \wedge \ \sigma \models \varphi}$

$\varphi \mathcal{U} \psi$ ("φ until ψ") is a state formula:

$\boxed{\sigma \models \varphi \mathcal{U} \psi \quad \Leftrightarrow \quad \exists j : (\sigma(j), \sigma(j+1), \ldots \models \psi) \ \wedge \ (\forall i < j : \sigma(i), \sigma(i+1), \ldots \models \varphi)}$

$\boxed{\mathrm{E}\,\Diamond\varphi = \mathrm{E}\,(\mathrm{true}\,\mathcal{U}\varphi)}$ $\boxed{\mathrm{A}\,\Diamond\varphi = \mathrm{A}\,(\mathrm{true}\,\mathcal{U}\varphi)}$

$\boxed{\mathrm{E}\,\Box\varphi = \mathrm{E}\,\neg\Diamond\neg\varphi = \neg\,\mathrm{A}\,(\mathrm{true}\,\mathcal{U}(\neg\varphi))}$ $\boxed{\mathrm{A}\,\Box\varphi = \mathrm{A}\,\neg\Diamond\neg\varphi = \neg\,\mathrm{E}\,(\mathrm{true}\,\mathcal{U}(\neg\varphi))}$

$\boxed{\mathrm{E}\,\varphi \quad \Leftrightarrow \quad \neg\,\mathrm{A}\,\neg\varphi}$

Operator	CTL	TL
globally	G	$\Box$
future	F	$\Diamond$
next	X	$\bigcirc$
until	U	$\mathcal{U}$
exists	E	
for all	A	

15.4.1 State Formulas

state formulas can be evaluated at states occurring at certain positions of a given sequence.

- vocabulary ν, subset $V \subset \nu$
- every variable $x \in V$ is an expression over V
- if p, q are state formulas over V, then $\neg p, p \vee q, p \wedge q, p \rightarrow q, p \leftrightarrow q$ are state formulas
- a *state* over V is an interpretation of variables that assigns to each variable $u \in V$ a value of u's domain denoted $s[u]$
- a *model* over V is an infinite sequence of states s_i over $V : \sigma : s_0, s_1, s_2, \ldots$
- $\boxed{s[f(e1, e2, \ldots, e_m)] = f(s[e1], s[e2], \ldots, s[e_m])}$
- state s' is called an *x-variant* of s, if $s'[y] = s[y] \ \ \forall y \in V \backslash \{x\}$
- a boolean state formula p *holds at state* s $\boxed{s \models p \ \text{ iff } \ s[p] = T}$[1]
- $\boxed{s \models \neg p' \ \text{ iff } \ s \not\models p'}$ $\boxed{s \models (p_1 \vee p_2) \ \text{ iff } \ (s \models p_1) \ \vee \ (s \models p_2)}$

15.4.2 Temporal Operators

- (σ, j) refers to the position $j \geq 0$ in the sequence $\sigma : s_0, s_1, \ldots$
- $\boxed{(\sigma, j) \models p \ \text{ iff } \ s_j \models p}$
- operators :
  - next operator: $\boxed{(\sigma, j) \models \bigcirc p \ \text{ iff } \ (\sigma, j+1) \models p}$
  - always operator: $\boxed{(\sigma, j) \models \Box p \ \text{ iff } \ (\sigma, k) \models p \ \forall k \geq j}$
  - eventually operator: $\boxed{(\sigma, j) \models \Diamond p \ \text{ iff } \ (\sigma, k) \models p \ \text{ for some } k \geq j}$
  - until operator: $\boxed{(\sigma, j) \models p \mathcal{U} q \text{ iff } \exists k \geq j, \text{ such that } (\sigma, k) \models q \text{ and for every } i, j \leq i < k, (\sigma, i) \models p}$
  - wait operator: $\boxed{(\sigma, j) \models p \mathcal{W} q \text{ iff } (\sigma, j) \models p \mathcal{U} q \text{ or } (\sigma, j) \models \Box p}$
- past operators :
  - previous operator: $\boxed{(\sigma, j) \models \ominus p \ \text{ iff } \ (j > 0) \ \wedge \ (\sigma, j-1) \models p}$
  - has-always-been operator: $\boxed{(\sigma, j) \models \boxminus p \ \text{ iff } \ (\sigma, k) \models p \ \forall k, 0 \leq k \leq j}$
  - once operator: $\boxed{(\sigma, j) \models \diamondminus\, p \ \text{ iff } \ (\sigma, k) \models p \ \text{ for some } k, 0 \leq k \leq j}$
  - since operator: $\boxed{(\sigma, j) \models p \mathcal{S} q \text{ iff } \exists k, 0 \leq k \leq j, \text{ such that } (\sigma, k) \models q \text{ and for every } i, k < i \leq j, (\sigma, i) \models p}$
  - back-to operator: $\boxed{(\sigma, j) \models p \mathcal{B} q \text{ iff } (\sigma, j) \models p \mathcal{S} q \text{ or } (\sigma, j) \models \boxminus p}$

[1] T = "true", F = "false"

15.4.3 Properties of Operators

- Expansion:

$\boxed{\Box P \quad \Leftrightarrow \quad (p \wedge \bigcirc \Box p)}$ $\boxed{\Diamond p \quad \Leftrightarrow \quad (p \vee \bigcirc \Diamond p)}$

$\boxed{p\mathcal{U}q \quad \Leftrightarrow \quad (q \vee (p \wedge \bigcirc(p\mathcal{U}q)))}$ $\boxed{p\mathcal{W}q \quad \Leftrightarrow \quad (q \vee (p \wedge \bigcirc(p\mathcal{W}q)))}$

- Duality:

$\boxed{\neg\Box p \quad \Leftrightarrow \quad \Diamond\neg p}$ $\boxed{\neg\Diamond p \quad \Leftrightarrow \quad \Box\neg p}$

$\boxed{\neg(p\mathcal{U}q) \quad \Leftrightarrow \quad (\neg q)\mathcal{W}(\neg p \wedge \neg q)}$ $\boxed{\neg(p\mathcal{W}q) \quad \Leftrightarrow \quad (\neg q)\mathcal{U}(\neg p \wedge \neg q)}$ $\boxed{\neg\bigcirc p \quad \Leftrightarrow \quad \bigcirc\neg p}$

- Idempotence:

$\boxed{\Box\Box p \quad \Leftrightarrow \quad \Box p}$ $\boxed{\Diamond\Diamond p \quad \Leftrightarrow \quad \Diamond p}$

$\boxed{p\mathcal{U}(p\mathcal{U}q) \quad \Leftrightarrow \quad p\mathcal{U}q}$ $\boxed{p\mathcal{W}(p\mathcal{W}q) \quad \Leftrightarrow \quad p\mathcal{W}q}$

$\boxed{(q\mathcal{U}q)\mathcal{U}q \quad \Leftrightarrow \quad p\mathcal{U}q}$ $\boxed{(q\mathcal{W}q)\mathcal{W}q \quad \Leftrightarrow \quad p\mathcal{W}q}$

- Absorption:

$\boxed{\Diamond\Box\Diamond p \quad \Leftrightarrow \quad \Box\Diamond p}$ $\boxed{\Box\Diamond\Box p \quad \Leftrightarrow \quad \Diamond\Box p}$

- Commutation:

$\boxed{\bigcirc(\neg p) \quad \Leftrightarrow \quad \neg\bigcirc p}$ $\boxed{\bigcirc(p \vee q) \quad \Leftrightarrow \quad (\bigcirc p) \vee (\bigcirc q)}$ $\boxed{\bigcirc(p\mathcal{W}q) \quad \Leftrightarrow \quad (\bigcirc p)\mathcal{W}(\bigcirc q)}$

16 Näherungsformeln

Für kleine ϵ $(\epsilon \ll 1)$ gelten folgende Näherungsformeln :

$\ln(1+\epsilon) \approx \epsilon$	$\frac{1}{1-\epsilon} \approx 1+\epsilon$	$(1+\epsilon)^2 \approx 1+2\epsilon$

17 physikalische Konstanten

Influenzkonstante $\epsilon_0 = 8.8542 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}}$
Induktionskonstante $\mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c_0^2} = 1.2566 \cdot 10^{-6}\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}}$
Elementarladung $q_e = 1.602189 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{As}$
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum $c_0 = 2,99792458 \cdot 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
Gravitationskonstante $G = 6.672 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2}$
Avogadro-Konstante $N_A = 6.02205 \cdot 10^{23}\,\frac{1}{\mathrm{mol}}$
Molvolumen $V_{mol} = 0.0224136\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{mol}}$
Boltzmann-Konstante $k = 1.38066 \cdot 10^{-23}\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}$
Gaskonstante $R = kN_A = 8.3143\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{Kmol}}$
Faraday-Konstante $F = eN_A = 9.64867 \cdot 10^4\,\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{mol}}$
Ruhemasse des Protons $m_p = 1.67261 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$
Ruhemasse des Neutrons $m_n = 1.67482 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$
Ruhemasse des Elektrons $m_e = 9.010953 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$
Spezifische Ladung des Elektrons $e/m_e = 1.758803 \cdot 10^{11}\,\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{kg}}$
Ruheenergie des Elektrons $m_e c_0^2 = 0.511\,\mathrm{MeV}$
Atomare Masseneinheit $u = \frac{1}{12} m(^{12}C) = 1.66055 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg} = 931.48\mathrm{MeV}$
Planksches Wirkungsquantum $h = 6.626176 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}$

18 Einheiten

Größe	Einheit	SI	Umrechnung
Kraft F	Newton	$N = \frac{kg\,m}{s^2}$	$= \frac{W\,s}{m} = \frac{J}{m} = Pa\,m^2$
Energie W	Joule	$J = \frac{kg\,m^2}{s^2}$	$= N\,m = W\,s = V\,A\,s$
Leistung P	Watt	$W = \frac{kg\,m^2}{s^3}$	$= \frac{J}{s} = \frac{N\,m}{s} = V\,A$
Druck p	Pascal	$Pa = \frac{kg}{m\,s^2}$	$= \frac{N}{m^2} = \frac{J}{m^3}$
Spannung U	Volt	$V = \frac{kg\,m^2}{A\,s^3}$	$= \frac{N\,m}{A\,s} = \frac{J}{A\,s} = \frac{J}{C} = \Omega\,A$
el. Widerstand R	Ohm	$\Omega = \frac{kg\,m^2}{A^2\,s^3}$	$= \frac{V}{A} = \frac{1}{S} = \frac{H}{s} = \frac{s}{F} = \frac{N\,m}{A^2\,s}$
el. Leitfähigkeit G	Siemens	$S = \frac{A^2\,s^3}{kg\,m^2}$	$= \frac{A}{V} = \frac{1}{\Omega}$
Induktivität L	Henry	$H = \frac{kg\,m^2}{A^2\,s^2}$	$= \Omega\,s = \frac{J}{A^2} = \frac{Wb}{A} = \frac{V\,s}{A} = \frac{s^2}{F}$
magn. Fluß Φ	Weber	$Wb = \frac{kg\,m^2}{A\,s^2}$	$= T\,m^2 = V\,s = A\,H$
magn. Flußdichte B	Tesla	$T = \frac{kg}{A\,s^2}$	$= \frac{Wb}{m^2} = \frac{V\,s}{m^2} = \frac{N}{A\,m} = \frac{W\,s}{A\,m^2}$
el. Ladung Q	Coulomb	$C = A\,s$	
Kapazität C	Farad	$F = \frac{A^2\,s^4}{kg\,m^2}$	$= \frac{A\,s}{V} = \frac{C}{V} = S\,s = \frac{s}{\Omega} = \frac{A\,s^2}{T\,m^2} = \frac{s^2}{H}$