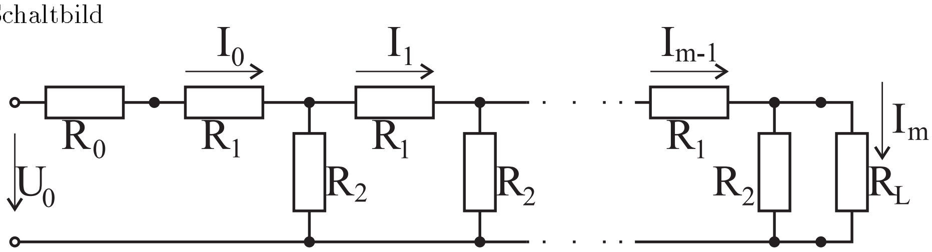
Kochrezept: Kettenleiter

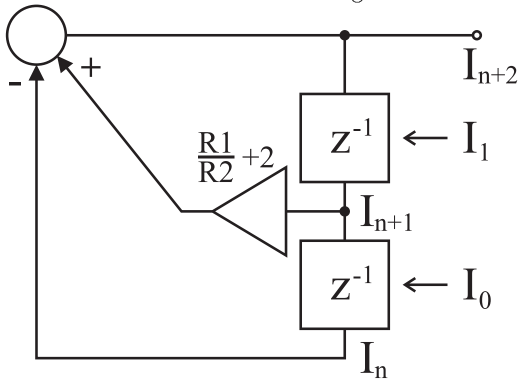
- Schaltbild



- Differenzengleichung

$$I_{n+1}(R_1+2R_2) = (I_n + I_{n+2})R_2$$
$$\Leftrightarrow$$
$$I_{n+2} = I_{n+1}\left(\tfrac{R_1}{R_2}+2\right) - I_n$$
$$(0 \le n \le m-2)$$

- Rechenschaltung



- Z-Transformation

$$\left.\begin{array}{lcl} I_n & \circ\!\!-\!\!\bullet & I(z) \\ I_{n+1} & \circ\!\!-\!\!\bullet & z(I(z)-I_0) \\ I_{n+2} & \circ\!\!-\!\!\bullet & z^2(I(z)-I_0-I_1z^{-1}) \end{array}\right\} \quad I(z) = \frac{z^2I_0 - zI_0(\frac{R_1}{R_2}+2)+zI_1}{z^2-(\frac{R_1}{R_2}+2)z+1}$$

- Eingangsmasche $\quad U_0 + I_1R_2 = I_0(R_0+R_1+R_2) \quad \Leftrightarrow \quad I_1 = I_0\left(\frac{R_0+R_1}{R_2}+1\right) - \frac{U_0}{R_2}$

$\rightsquigarrow$ in Z-Transformierte einsetzten : $\quad I(z) = \frac{z^2I_0 - z(I_0(1-\frac{R_0}{R_2})+\frac{U_0}{R_2})}{z^2-(\frac{R_1}{R_2}+2)z+1}$

- Pole von I(z) $\quad z_{1/2} = 1 + \frac{R_1}{2R_2} \pm \sqrt{\left(1+\frac{R_1}{2R_2}\right)^2 - 1} \quad = \quad 1 + \frac{R_1}{2R_2} \pm \frac{R_1}{2R_2}\sqrt{1+4\frac{R_2}{R_1}}$

- Rücktransformation (für $z_1 \neq z_2$)

1. Ansatz: $I(z) = A_0 + \frac{A_1}{z-z_1} + \frac{A_2}{z-z_2}$

$A_0 = I_0$

$\rightsquigarrow I(z) - A_0 = \frac{z(I_0(1+\frac{R_1+R_0}{R_2})-\frac{U_0}{R_2})-I_0}{(z-z_1)(z-z_2)}$

$A_1 = \frac{z_1I_1-I_0}{z_1-z_2} \qquad A_2 = \frac{z_2I_1-I_0}{z_2-z_1}$

$$I_n = A_0\delta(n) + A_1z_1^{n-1}s(n-1) + A_2z_2^{n-1}s(n-1)$$
$$= \begin{cases} A_0 & \text{für } n=0 \\ A_1z_1^{n-1}+A_2z_2^{n-1} & \text{für } n>0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

2. Ansatz: $I(z) = z\left(\frac{B_1}{z-z_1} + \frac{B_2}{z-z_2}\right)$

$B_1 = \frac{I_0z_1-\alpha}{z_1-z_2}$

$B_2 = \frac{I_0z_2-\alpha}{z_2-z_1}$

mit $\alpha := I_0(1-\frac{R_0}{R_2}) + \frac{U_0}{R_2}$

$I_n = B_1z^n + B_2z^n \qquad$ (für $n = 2, 3, \ldots m-1$)

- I_0 bestimmen

1. Möglichkeit: Ausgangsmasche
$I_m(R_L+R_2) = I_{m-1}R_2$
$\rightsquigarrow$ I_n einsetzen und nach I_0 auflösen

2. Möglichkeit: Randbedingung
I_m muß für $m \to \infty$ beschränkt bleiben
$\Rightarrow$ Koeffizent bei z_i^n mit $|z_i| > 1$ muß Null sein !
$\rightsquigarrow$ nach I_0 auflösen

- Eingangswiderstand $\quad R_E = \frac{U_0}{I_0}$